MATEMÁTICAS SUPERIORES

M. C. ENRIQUE DE LA FUENTE MORALES

ReDIE
Red Durango de Investigadores Educativos A.C.

ISBN: 978-607-9063-54-2
9 786079 063542

M.C. ENRIQUE DE LA FUENTE MORALES
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA ELECTRÓNICA
PROFESOR INVESTIGADOR
BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA

Primera edición: noviembre de 2016

Editado en México

*ISBN: 978-607-9063-54-2

*Editor: *

RED DURANGO DE INVESTIGADORES EDUCATIVOS A. C.

Corrector de estilo:

Diseño Jair Raúl Sánchez Morales BUAP y Alatriste Aguirre Jesús Alejandro BUAP

* Diseño de portada*

Israel Bruno Sánchez Morales BUAP

DEDICATORIA

A mi madre **Gema Noemí Morales** quien con amor, cariño y disciplina me enseño las primeras letras, dándome carácter y honestidad, a mi esposa **Karen del Carmen** cuyo amor y dulzura me acompaña siempre, motivándome , a mis hermanitos, **Gamaliel, José Antonio, Jair Raúl e Israel Bruno**, cuyo cariño y ayuda, me dan alegría, a mis grandes maestros **Gerardo Torres Del Castillo, Gerardo Torres Ramírez, Carmen Romano** y **Josué Arroyo** sus sabias enseñanzas forjaron mi conocimiento, haciéndome mejor persona, a mis alumnos por su compañia, le agradezco a Dios por todos ellos y por la vida que me permite cada día acercarme a buscar la verdad.

ÍNDICE

TEMA I: CÁLCULO DIFERENCIAL (Matemáticas Universitarias I).

BLOQUE I: FUNCIONES.

BLOQUE II: LÍMITES.

BLOQUE III: DERIVADAS.

TEMA II: CÁLCULO INTEGRAL (Matemáticas Universitarias II).

BLOQUE I: INTEGRAL.

BLOQUE II: TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN.

BLOQUE III: SUCESIONES Y SERIES.

TEMA III: VARIABLE COMPLEJA (MÉTODOS MATEMÁTICOS).

BLOQUE I: NÚMEROS COMPLEJOS.

BLOQUE II: FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

BLOQUE III: INTEGRALES COMPLEJAS.

TEMA I

CÁLCULO DIFERENCIAL

(Matemáticas Universitarias I)

FUNCIONES **BLOQUE I**

1.1 DEFINICIÓN.

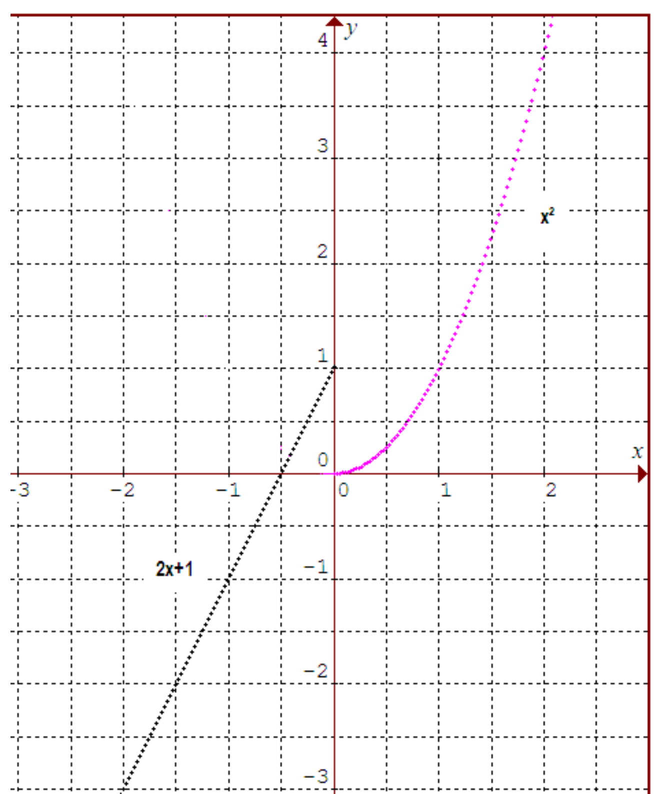
Sea A y B dos conjuntos que pertenecen al conjunto de los $\mathbb{R}$, entonces la función de AB es una regla de aplicación que lleva a cada punto del dominio (A) a un único punto del codominio (B).

$$\forall a \nabla A \exists! b \nabla B / f(a)=b$$

DOMINIO: Es el conjunto de puntos donde existe la función.
CODOMINIO: $Img(f)=\{b \nabla B : f(a)=b\}$
REGLA DE APLICACIÓN: Es la regla que rige el comportamiento de los puntos del dominio.
Por ejemplo:
$f: A \to B, A, B \subset \mathbb{R}, f(x)=x^2$
$f(2)=4$ $f(4)=16$ $f(-1)=1$
$Dom(f)=(-\infty,\infty)$
$Img(f)=[0,\infty)$
$g(x)=\sqrt{(2x+4)}$ $x \nabla [0,6)$
$Dom(g)=[0,6)$
$Img(g)=[2,4)$
Evaluando con $x \nabla \mathbb{R}$
$Dom(g)=[-2,\infty)$
$Img(g)=[0,\infty)$
Si el dominio $Dom(g)=x \nabla [0,6)$, entonces la $Img(g)=[2,4]$

$$h(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 2x+1 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

El dominio e imagen de la función es:



Dom(h)=(-∞,∞)
Img (h)=(-∞,∞)

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Dom(| |)=(-∞,∞)
Img (| |)=[0,∞)

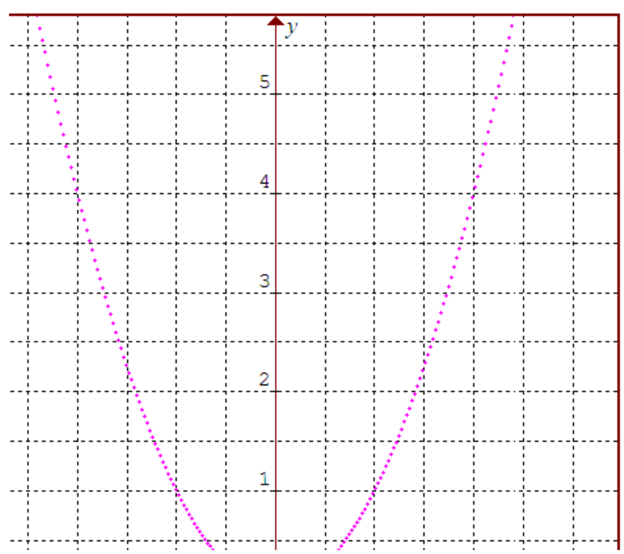
1.2 GRÁFICA DE FUNCIONES

Definición: Sea f con dominio D entonces la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos P(x, f(x)) en el plano donde x es elemento x ∇ D, a veces f(x)=y

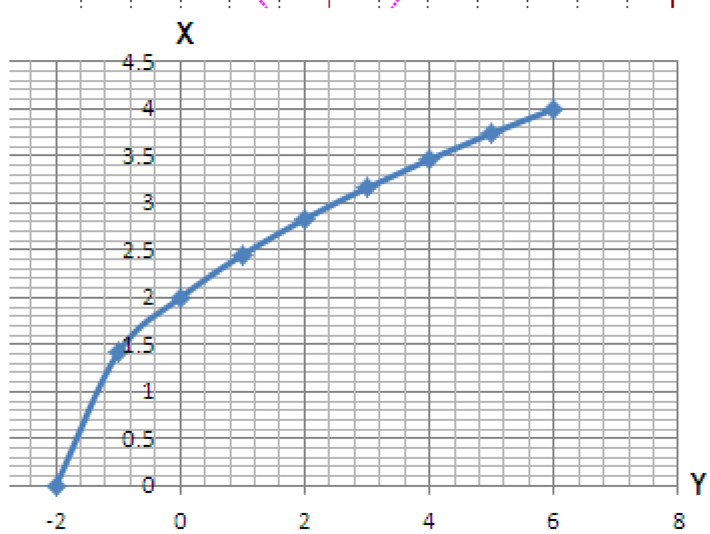
graf (f)={(x,y):x∇D∧y=f(x)}

Ejemplo: Encontrar su gráfica de $f(x)=X^2$.

Dom(f)=(-∞,∞)
Img(f)=[0,∞)



Ejemplo: Encontrar la gráfica de la función $g(x)=\sqrt{(2x+4)}$



Dom (g)=[-2, ∞), donde 2x+4≥0

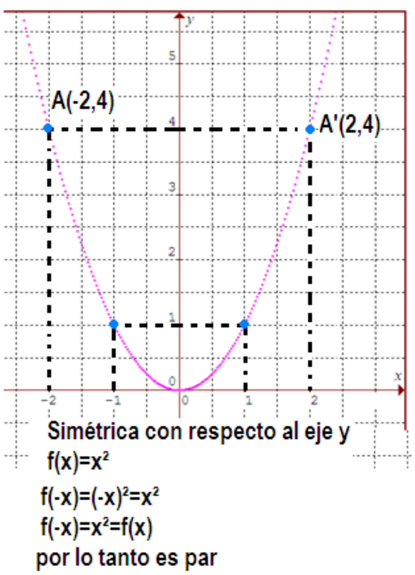
x≥-2

Img (g)= [0,∞)

FUNCIONES PARES E IMPARES

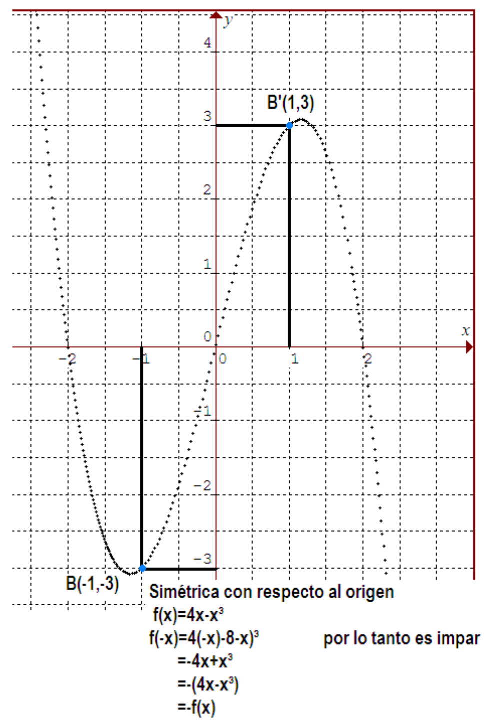
1) Definición: una función es par si y solo si f(-x)=f(x), ∀ x ∇ Dom(f)

2) Definición: una función es impar si y solo si f(-x)=-f(x) ,∀ x ∇ Dom(f)



1)

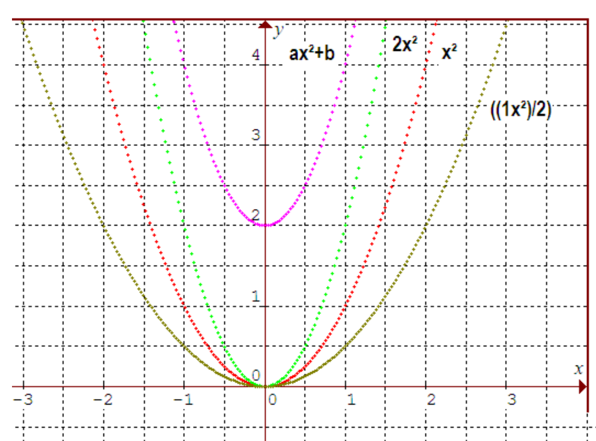
2)



Ejemplos

ax^2 ¿Qué sucede cuando 0<a<1 y cuando ax^2+b?

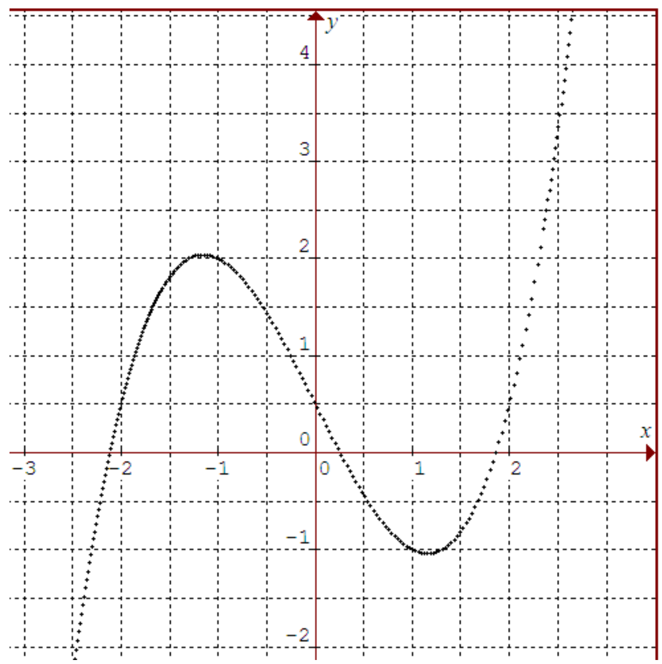
x	$f(x^2)$	$f(2x^2)$	$f(1/2\ x^2)$
0	0	0	0
1	1	2	½
2	4	8	2
3	9	18	9/2
4	16	32	8
5	25	50	25/2



a x^2 va a ocurrir una transformación a lo largo, comprimiendo al eje vertical. En el caso de ½(x^2) se abre mas con respecto al eje y.

Encontrar dominio e imagen de la función y dibujar su gráfica.
f(x)= ((1x³)/2)-2x+(1/2)

Dom(f)=(-∞,∞)
Img(f)=(-∞,∞)



1. Calcular a) f(0) b)f(-2) c)f(3/2)
i) f(x)= 2x/(|x+2|+ x²)
a) f(0)=2(0)/(|0+2|+ (0)²)=0
b) f(-2)=2(-2)/(|-2+2|+ (-2)²)=-4/4=-1
c) f(3/2)=2(3/2)/(|3/2+2|+ (3/2)²)=3/(23/4)=12/23
ii) f(x)=1-1/(x+1)²
a) f(0)=1-1/(0+1)²=1-1/1=0
b) f(-2)=1-1/(-2+1)²=1-1/1=0
c) f(3/2)=1-1/(3/2+1)²=21/25
iii)f(x)=|x+3|-5x
a) f(0)=|0+3|-5(0)=3
b) f(-2)=|-2+3|-5(-2)=11
c)f(3/2)=|3/2+3|-5(3/2)=-3

2. Hallar el dominio y la imagen de las siguientes funciones.

a)f(x)= |**x**|

Dom(f)=(-∞,∞)

Img(f)=[0,∞)

b)f(x)= $\overline{7-x}-1$

7-x≥0

x≤7

Dom(f)=(-∞,7]

Img(f)=[-1,∞)

c)f(x)= $\overline{x-1}-1$

x-1≥0

x ≥1

Dom(f)=[1,∞)

Img(f)=[-1,∞)

d)f(x)=$1/\ 4\overline{-x^2}$

$4-x^2>0$

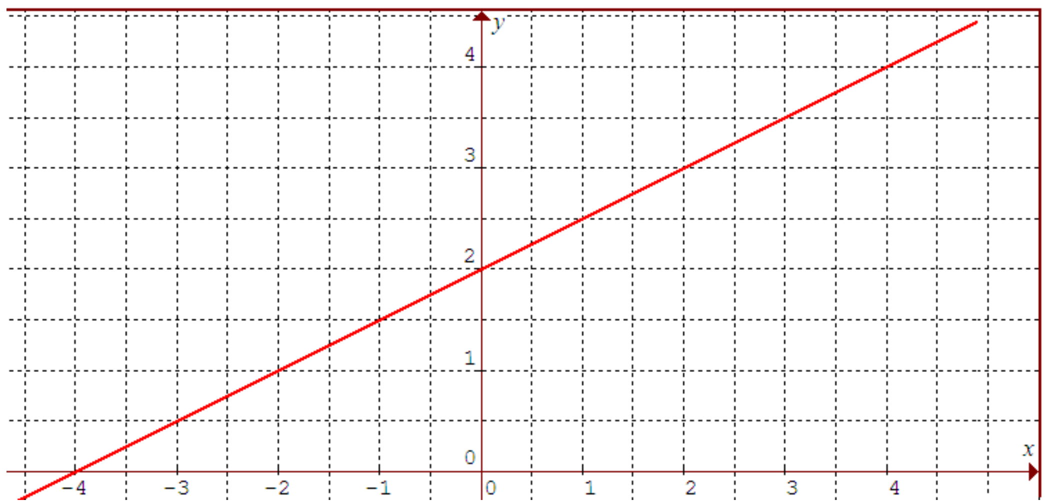
x<2 ó x>-2

Dom(f)=(2,-2)

Img(f)=(0,∞)

3. Hallar el dominio y dibujar la gráfica.

a)f(x)=x/2+2 Dom(f)=(∞,-∞)

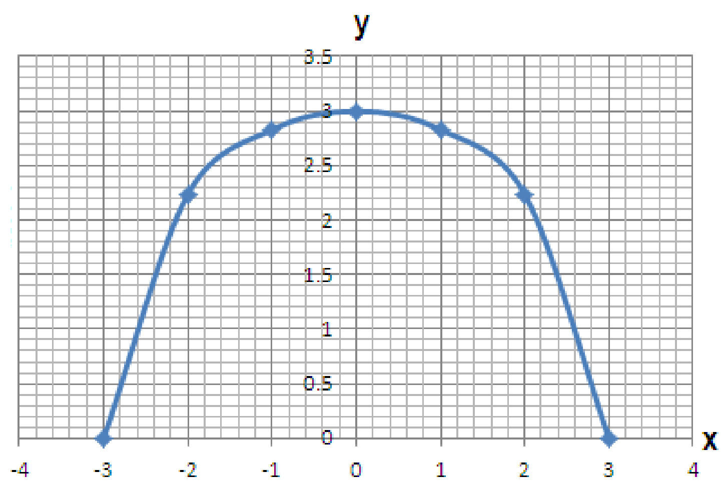


b)f(x)= $(9-x^2)$

$9-x^2\geq 0$

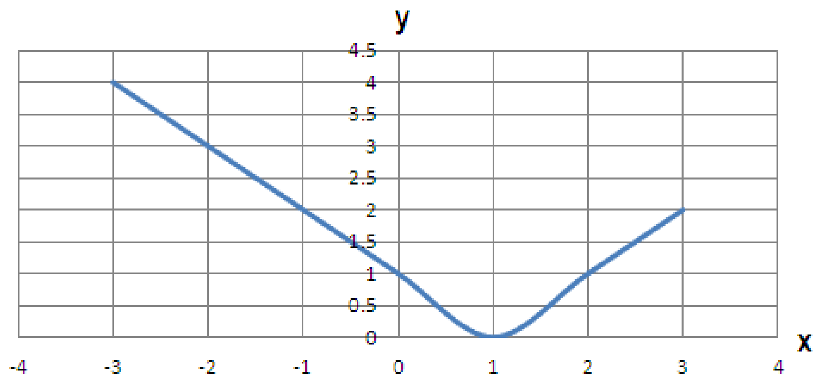
x≤ 3 ó x≥-3

Dom(f)=[3,-3]

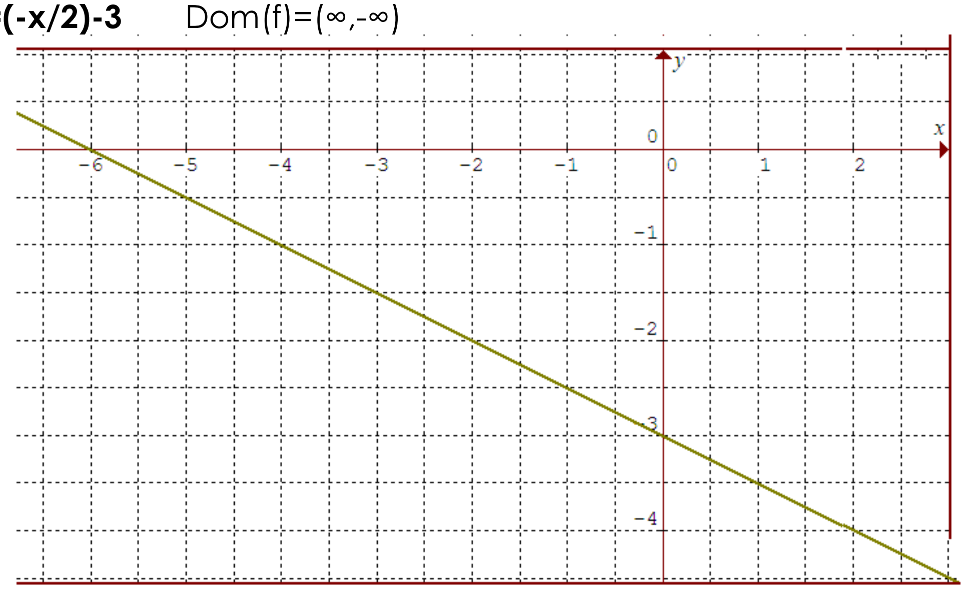


c)f(x)= |**x-1**|

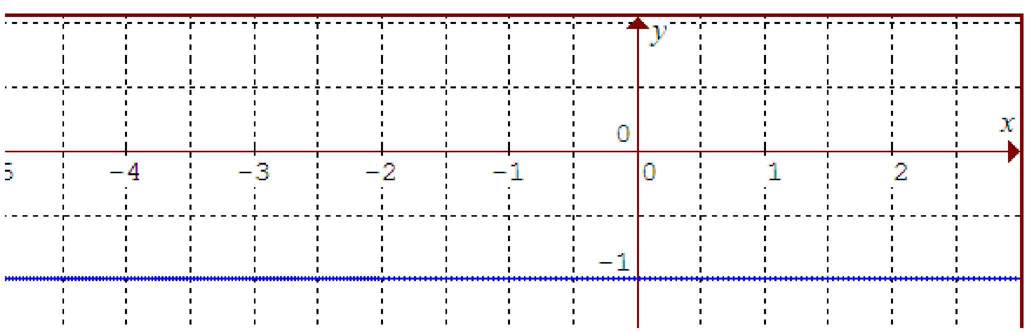
Dom(f)=(∞,-∞)



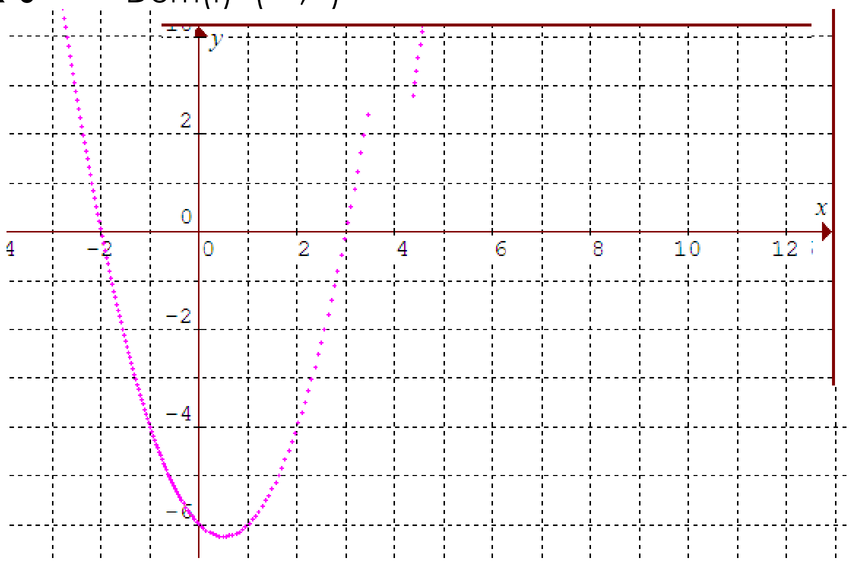
d)f(x)=(-x/2)-3 Dom(f)=(∞,-∞)



e)f(x)=-1 Dom(f)=(-∞,∞)



f) $f(x)=x^2-x-6$ Dom(f)=$(-\infty,\infty)$



4. Determine si la función es par o impar o ninguna de las dos

a)$g(x)= x(x-1)$ ninguna de las dos

$g(x)= -x(-x-1)$

b) $f(x)= x^2 / (1-|x|)$ = $f(-x)= (-x)^2/(1-|-x|)=x^2/(1-x)=f(-x)=f(x)$ función par

c) $f(x)=x+(1/x)$=$f(-x)=-x+(1/-x)=-x-1/x=-(x+1/x)= f(-x)=-f(x)$ función impar

d) $f(x)= x(x^2+1)$= $f(-x)= -x((-x)^2+1)= -x(x^2+1)$ninguna de las dos

1.3 IGUALDAD DE FUNCIONES

Sea dos funciones $f:A\to B \wedge g:c\to D$ reales de una variable real son iguales si solo si $A=C \wedge B=D \wedge \forall x \nabla A$ cumple que $f(x)=g(x)$.

Por ejemplo:

$f,g: \mathbb{R}\backslash\{1\}\to\mathbb{R}$

$f(x)=(x^2-1)/(x-1) \wedge g(x)=x+1$

¿Son iguales? ¿Por qué?

$f\wedge g$ tienen el mismo dominio y la misma imagen

Entonces

$f(x)= ((x+1)(x-1))/(x-1)= x+1$

$f(x)= x+1 \wedge g(x)=x+1$ son iguales

1.4 OPERACIONES DE FUNCIONES

Sean f y g dos funciones reales de una variable real entonces la suma, la resta el cociente y el producto de f y g se representa de la siguiente forma

$[f \pm g](x) = f(x) \pm g(x)$
$[f \cdot g](x) = f(x) \cdot g(x)$
$[f/g](x) = f(x)/g(x) \quad g(x) \neq 0$
El dominio de la suma, resta, producto y cociente:
Dom (f)∩Dom(g)
para el cociente es lo mismo con la restricción $g(x) \neq 0$
Ejemplo: $f(x)=x^3+x-2$ Dom(f)= $(-\infty,\infty)$ **$g(x)=x/2- x$** Dom(g)= $[0,\infty)$
a)(f+g)(x)=
$=(x^3+x-2)+(x/2- x)$
Dom(f+g)=$(-\infty,\infty) \cap [0,\infty)$**=**$[0,\infty)$
b) (f · g)(x)= $(x^3+x-2)(x/2- x)$
Dom(f · g)= $(-\infty,\infty) \cap [0,\infty)$**=** $[0,\infty)$
c) (f/ g)(x)= $(x^3+x-2)/(x/2- x)$
Dom(f/g)= $(-\infty,\infty) \cap [0,\infty)$**=** $(0,4) \cup (4, \infty)=(0, \infty)\setminus\{4\}$

1.5 COMPOSICIÓN DE FUNCIONES.

Sea f y g funciones D={x∇Dom(g):g(x) ∇dom (f)}, fog es la función definida en D, (fog)(x)=f(g(x)).
Ejemplos :
$g(x)=x^2 \wedge f(x)=x+3$

(fog)(x)=?
$f(g(x))=f(x^2)= x^2+3$

(gof)(x)=?
$g(f(x))=g(x+3)=(x+3)^2$

$g(x)= (3-x) \wedge f(x)=x^2-1$ **Dom (g)= $(-\infty,3]$ Dom(f)= $(-\infty,\infty)$**
(fog)(x)=? , (gof)(x)=? , dom (fog)=?
$(fog)(x)=f(g(x))=((3-x))^2 -1=3-x-1=-x+2=2-x$
Dom(fog)=$(-\infty,3)$

$(gof)(X)=g(f(x))=g(x^2-1)= (3 - x2 + 1) = (4-x^2)$
Dom (gof)= $(-\infty,3]$

1.6 FUNCIÓN INYECTIVA.

Una función es inyectiva si solo si cumple lo siguiente f: **A→B** ∀a,a'∇A con a≠a' ⇒ f(a)≠f(a')

Ejemplo: f:ℝ→ℝ f(x)=2x+5

¿es inyectiva?¿por qué? Si es inyectiva

Sea x≠x'

⇒ 2x ≠ 2x'

⇒2x+5 ≠ 2x'+5

⇒f(x) ≠ f(x')

Por lo tanto es inyectiva

Teorema: Si f es una función f: A→B ^ g: B→C entonces i) go f es inyectiva⇒ f debe ser inyectiva ii) si f y g son inyectiva⇒fog es inyectiva.

1.7 FUNCIÓN SUPRAYECTIVA O SOBREYECTIVA.

Sea f: A→B es suprayectiva si ∀b∇B∃a∇A tal que f(a)=b

Ejemplo: f:ℝ→ℝ, f(x)=$|x|$ ¿es suprayectiva?¿por que?

f(x)=$|x|$

-1=$|x|$ =f(x) *por lo tanto es suprayectiva

-1∇ℝ∄ x∇ℝ tal que

$|x|$ = -1

1.8 FUNCIÓN BIYECTIVA.

Una función es biyectiva si es suprayectiva e inyectiva.

¿Una función lineal es suprayectiva, inyectiva o biyectiva?

f(x)=ax+b

seax≠x'

⇒x≠x'

⇒ax≠ax'

⇒ax+b≠ax'+b

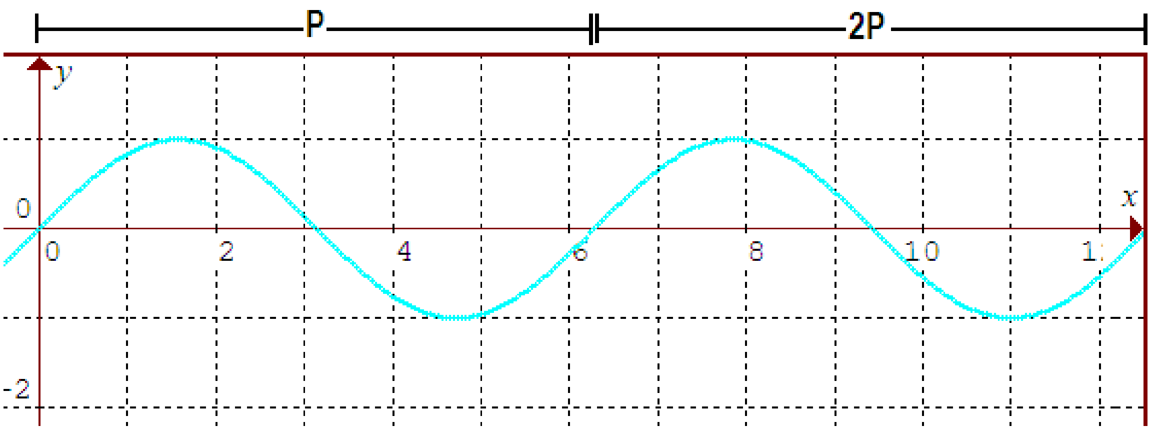
Por lo tanto es inyectiva

f(x)=ax+b
si f(a)= f(a') ⇒ a=a'
ax+b=ax'+b
ax=ax'
x=x'
por lo tanto es inyectiva

f(x)=ax+bf: ℝ→ℝ
∀b∇B∃a∇A tal que f(a)=b
f(x)=ax+b
Sea y=f(x) f(x)=f((y-b)/a)=(y-b)+b=y
⇒y=ax+b
⇒y-b=ax
⇒ (y-b)/a=x
Si es biyectiva por que es inyectiva y biyectiva.

1.9 FUNCIÓN PERIODICA.

f es una función que va de f: A→B y P∇ℝP≠0 se dice que es periódica si f(x)= f(x+P) ∀x∇A con x, x+P∇A
Por ejemplo: función sen x



El número P más pequeño que cumple esa condición se llama periodo de f.

1.10 FUNCIÓN EXPONENCIAL.

Es una función de la forma f(x)= a^x donde a es un entero positivo $\mathbb{Z}^+$

$a^x=a\ldots^{x\ veces}\ldots a$

1. $a^0= 1$
2. $a^{-n}= 1/a^n$
3. $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$
4. $a^{xy}= a^x \cdot a^y$

Leyes de los exponentes.

a y b $\nabla\mathbb{Z}^+$ ^ x,y$\nabla\mathbb{R}$

1. $a^{x+y}=a^x \cdot a^y$
2. $a^{x-y}=a^x/a^y$
3. $(a^x)^y=a^{xy}$
4. $(ab)^x=a^xb^x$

Logaritmo

$f^{-1}(x)= y$

Sea x,y$\nabla\mathbb{R}^+\Rightarrow$

1. $\log_a(xy)= \log_a x+ \log_a y$
2. $\log_a(x/y)= \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a (x^r)= r \log_a x$

ln

Al log base e $\log_e$ se le denota ln x= f(x),

i) ln x=y $\Leftrightarrow e^y=x$

ii) ln (e^x)= x, x$\nabla\mathbb{R}$

$e^{\ln x}=x \quad x>0$

iii) ln e=1

2.1 DEFINICIÓN.

Es una función, el límite mide distancias.

$$\lim_{x\to a} f\ x\ = L$$

$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0$ tal que $|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon$

Continuidad

$$\lim_{x\to a} f\ x = f(a)$$

Derivada

$$\lim_{x\to a} \frac{f\ x - f(a)}{x-a}$$

Demostrar los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 2}\ 2x - 1\ = 3$$

$\Rightarrow|2x-1-3|=|2x-4|=|2(x-2)|=|2|\ |x-2|<\varepsilon$

$\Rightarrow\ |x-2|<\varepsilon/2=\delta$

$$\lim_{x\to -1}\ 2 - 3x\ = 5$$

$\Rightarrow|2-3x-5|=|-3x-3|=|-3(x+3)|=|-3|\ |x+3|<\varepsilon$

$\Rightarrow\ |x-2|<-(\varepsilon/|-3|)=\delta$

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4$$

$\Rightarrow|x^2-4|=|(x+2)(x-2)|=|x+2|\ |x-2|=\ |x+2|\ |x-2|\leq|x-2|\ \cdot 4<\varepsilon$

$\Rightarrow\ |x-2|<\varepsilon/4=\delta$

2.2 PROPOSICIONES.

Para cualquier número

$$\lim_{x\to c}\ c\ =\ c$$

Proposiciones:

i)

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

ii)

$$\lim_{h\to o} f(c+h)=L$$

iii)

$$\lim_{x\to c} |f(x) - L| = 0$$

iv)

$$\lim_{x\to c} f(x) - L = 0$$

2.3 LIMITES LATERALES.

Limite por la izquierda:
Sea f una función definida en un intervalo de la forma (a-P,a) P>0, entonces el

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=L$$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \exists \delta>0$ tal que $a-\delta<x<a \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

Limites por la derecha:
Sea f definida en un intervalo (a,a+P) P>0 entonces

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L$$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \exists \delta>0$ tal que $a<x<a+\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

TEOREMA: Si el limite de f(x)

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

$\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=L$$

Si coinciden los limites existe el limite general.

Ejemplo: ¿existe el limite?¿cuál es?

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & x\leq 0 \\ x^2-x & x>0 \end{cases}$$

Por el teorema:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=L$$

Entonces,

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 - x = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} 2x + 1 = 1$$

Los limites laterales son diferentes

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Entonces el lim f(x) no existe por que los limites laterales no son iguales

TEOREMA: si existen los limites

$$\lim_{x \to a} f\ x = L \quad \lim_{x \to a} g\ x = M$$

i)

$$\lim_{x \to a} [f\ x \pm \mathrm{g\ x}] = L \pm \mathrm{M}$$

ii)

$$\lim_{x \to a} f\ x \cdot \mathrm{g\ x} = L \cdot \mathrm{M}$$

iii)

$$\lim_{x \to a} [f\ x\ /\mathrm{g\ x}] = L/\mathrm{M}$$

con g(x) ≠ 0

iv)

$$\lim_{x \to a} [\alpha f\ x] = \alpha L$$

$$\alpha \nabla \mathbb{R}$$

Ejemplos:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)} = \lim_{x \to 3} x + 2 = 3 + 2 = 5$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{2-x}{2x}}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{2 - x}{(2x)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{-(-2+x)}{(2x)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{-(x-2)}{(2x)(x-2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{2\ 2} = -\frac{1}{4}$$

Demostrar

1.$\lim_{x \to 3} \sqrt{x+1} = 2$

2.$\lim_{x \to 3} \sqrt{3-x} = 0$

3.$\lim_{x \to 4} 2x - 5 = 3$

4.$\lim_{x \to 3} 6x - 7 = 11$

Calcular los limites si existen:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x}$

b) $\lim_{x\to 3^+} \frac{x+3}{x^2-7x+12}$

c) $\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x}$

d) $\lim_{x\to 2} f(x)$, f(x)= $\begin{cases} x^2 & x \le 1 \\ 5x & > 1 \end{cases}$

Soluciones

Demostrar

1.$\lim_{x\to 3} \sqrt{x+1} = 2$

Dem.

$$\rightarrow \quad \sqrt{x+1} - 2 = \frac{x+1-2}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2} < \varepsilon$$

Partimos de que

$$2 < x < 3$$
$$\rightarrow 3 < x+1 < 4$$
$$\rightarrow \sqrt{3} < \sqrt{x+1} < \sqrt{4}$$
$$\rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{\sqrt{x+1}} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\rightarrow \frac{1}{4+2} < \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} < \frac{1}{\sqrt{3}+2}$$

$$\rightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2} < \frac{x-3}{\sqrt{3}+2}$$
$$\rightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{x-3}{\sqrt{3}+2}$$

Ahora:

$$\frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2} < \varepsilon$$
$$\rightarrow \frac{x-3}{3+2} = \frac{x-3}{\sqrt{3}+2} = x-3 < (\sqrt{3}+2)\varepsilon$$

2.$\lim_{x\to 3} \sqrt{3-x} = 0$

Dem.

$$\rightarrow \sqrt{3-x} - 0 = \frac{3-x}{\sqrt{3-x}} < \varepsilon$$

Partimos de que

$$1 < 3-x < 0$$
$$\rightarrow \sqrt{1} < \sqrt{3-x} < \sqrt{0}$$
$$\rightarrow 1 < \sqrt{3-x} < 0$$
$$\rightarrow \frac{1}{0} < \frac{1}{\sqrt{3-x}} < 1$$
$$\rightarrow \frac{3-x}{0} < \frac{3-x}{\sqrt{3-x}} < 3-x$$
$$\rightarrow \frac{3-x}{\sqrt{3-x}} < 3-x$$
$$\rightarrow \frac{3-x}{\sqrt{3-x}} = 3-x$$

Ahora:

$$3-x < \varepsilon$$
$$\rightarrow x-3 = -\varepsilon$$

3.$\lim_{x\to 4} 2x-5 = 3$

Dem.

$$\rightarrow 2x-5-3 = 2x-8 = 2 \; x-4 \rightarrow x-4 < \frac{\varepsilon}{2}$$

4.$\lim_{x\to 3} 6x-7=11$

Dem.

$$\to \ 6x-7-11 \ = \ 6x-18 \ = \ 6 \ \ x-3 \ \to \ x-3 \ <\frac{\varepsilon}{6}$$

Encontrar el limite si es que existe

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x}$

Como sabemos que el límite por la derecha es 1 y por la izquierda es -1, entonces los limites laterales son distintos y por lo tanto el limite no existe.

b) $\lim_{x\to 3^+} \frac{x+3}{x^2-7x+12}$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{3+3}{3^2-7(3)+12}=\frac{6}{0}$$

Como la operación se indefine podemos decir que el limite tiende a infinito positivo porque se evalúa el limite por la derecha, y como tiene a infinito no existe el limite.

c) $\lim_{x\to 1^+} \frac{\overline{x-1}}{x}$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\overline{x-1}}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\overline{x-1}}{x}=0$$

Como los límites laterales son iguales entonces el límite es cero.

d) $\lim_{x\to 2} f(x)$, f(x)= $\begin{cases} x^2 & x\leq 1 \\ 5\text{x} & \text{x}>1 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 2^+} 5x=10$$
$$\lim_{x\to 2^-} 5x=10$$

Como los limites laterales son iguales entonces el límite es 10

Teorema de limites

1.TEOREMA DE LA UNICIDAD

Si:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \ y \lim_{x\to a} f(x) = M \to L = M$$

2.Si
$\lim_{x\to a} f(x) = L \ y \ \lim_{x\to a} g(x) = M$

i) $\lim_{x\to a} [\ f\ x + g(x)] = L + M$

ii) $\lim_{x\to a} [\ Af\ x\ ] = AM$

iii) $\lim_{x\to a} [\ f\ x\ g(x)] = LM$

iv) $\lim_{x\to a} [\ f\ x - g(x)] = L - M$

TEOREMA

Si $\lim_{x\to a} [\ g(x)] = M$ con M≠0 $\to \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$

TEOREMA

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L \ y \lim_{x\to a} f(x) = M$ con M≠0

$$\to \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$$

EJEMPLOS:

Calcular si existen

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x-1} = -1$

b)$\lim_{x\to 3}(5-4x)^2 = 49$ c)

$\lim_{x\to 3} |x^2-8| = 5$ d)

$\lim_{x\to -2} 3\ x-1 = 9$

e) $\lim_{x\to 2} \frac{x}{x^2-4} =$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x^2-4} = \infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x^2-4} = -\infty$$

Limites laterales distintos, no existe limite.

f) $\lim_{\to 0} (1 - \frac{1}{}) =$

$$\lim_{\to 0^+} (1 - \frac{1}{}) = 0$$

$$\lim_{\to 0^-} (1 - \frac{1}{}) = 0$$

El limite existe

g) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2+x+12}{x-3} =$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2+x+12}{x-3} = \infty$$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2+x+12}{x-3} = -\infty$$

Limites laterales distintos, no existe el limite

h) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2+x-12}{x-3} \rightarrow \frac{\cancel{x-3}\, x+4}{\cancel{x-3}}$

$$\lim_{x\to 3} x + 4 = 7$$

Suponiendo que f(x)=x^2- 4x, calcular los limites si existen

a) $\lim_{x\to 4} \frac{f\ x\ -f\ 4}{x-4} =$

$$\rightarrow \lim_{x\to 4} \frac{f\ x - f\ 4}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{x^2-4x-16-16}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{x^2-4x}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{x\ \cancel{x-4}}{\cancel{x-4}}$$

$$\rightarrow \lim_{x\to 4} x = 4$$

b) $\lim_{x\to 1} \frac{f\ x\ -f\ 1}{x-1} =$

$\rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{}{f\ x\ -f\ 1} = \lim \quad x-1 \quad x\to 1 \quad x^2-4x- \ -3$

$x-1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x-3)}{\cancel{x-1}}$$

$$\to \lim_{x\to 1} x-3 = -2$$

c) $\lim_{x\to 3} \frac{f\ x - f\ 1}{x-3} =$

$$\to \lim_{x\to 3} \frac{f\ x - f\ 1}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x - -3}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-1)\ \cancel{x-3}}{\cancel{x-3}}$$

$$\to \lim_{x\to 3} x - 1 = 2$$

d) $\lim_{x\to 3} \frac{f\ x - f\ 2}{x-3} =$

$$\to \lim_{x\to 3} \frac{f\ x - f\ 2}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x-4-8}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+4}{x-3}$$

$$\to \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-4x+4}{x-3} = -\infty$$

$$\to \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-4x+4}{x-3} = \infty$$

Limites laterales distintos, no existe limite.

2.4 CONTINUIDAD.

$$\lim_{x\to a} f\ x = f(a)$$

i) f(x) ∃

ii) $\lim_{x\to a} f\ x\ \exists$

iii) $\lim_{x\to a} f\ x = f(a)$

Definición: sea f una función definida en un intervalo abierto (a-P,a+P) P>0, f es continua si y solo si

$$\lim_{x\to a} f\ x = f(a)$$

$$\forall \varepsilon>0 \exists \delta>0 \text{ tal que } |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

TEOREMA: Si f y g son continuas en a entonces

i) $f \pm g$ **es continua en a.**

ii) f · g es continua en a.

iii) αf con $\alpha \nabla \mathbb{R}$ **es continua en a.**

iv) f/g g(a) ≠0 es continua en a.

Ejemplo: ¿si es continua, o no es continua y por que?

$$f\ x = 3\ x + \frac{x^3 - x}{x^2 - 5x + 6} + 4$$

$$f = 3f1 + \frac{f2}{f3} + 4$$

No es continua por que en 2 y 3 la función f2/f3 no existe.
f3 es continua excepto 2 y 3 ya que las funciones (f2/f3) debe ser f3≠0 por lo tanto no es continua en 2 y 3 en los demás valores es continua.
Evaluando cada función (f1,f2,f3), definimos si son continuas, si concluimos que los son tomamos en cuenta los teoremas (i,ii,iii,iv), para concluir que es continua.
Si g es continua en a y f es continua en g(a) la **función compuesta** fog es continua en a.
Ejemplo: ¿ es continua y por que? F(x) $\frac{x_2+1}{(x-8)^2}$

f(u)= u f(u) es continua excepto en negativos.
g(x)=$\frac{x^2+1}{(x-8)^2}$g(x) es continua excepto en 8.
Por lo tanto la función F=f1(g) es continua excepto en 8.

Ejemplos

a) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x-1} = \frac{0+1}{0-1} = -1$

b) $\lim_{x\to 3} x^2 - 8 = 3^2 - 8 = 3 - 8 = -5 = 5$

c) $\lim_{x\to 3}(5-4x)^2 = [5-4(3)]^2 = (5-12)^2 = (-7)^2 = 49$

d) $\lim_{x\to -2} 3\,x - 1 = 3\,-2 - 1 = 3\,-3 = 3\,3 = 9$

e) $\lim_{x\to 2}\frac{x}{x^2-4} = \frac{2}{4-4} = 0$

f) $\lim_{h\to 0} h(1-\frac{1}{h}) = \lim_{h\to 0} h(\frac{h-1}{h}) = \lim_{h\to 0} h-1 = 0-1 = -1$

g) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{(x-3)} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+4)}{(x-3)} = \lim_{x\to 3} x+4 = 3+4 = 7$

2.5 CONTINUIDAD LATERAL.

Definición de continuidad lateral derecha:
f es continua por la derecha en a si y solo si $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

∀ε>0∃δ>0 tal que 0<x-a<δ ⇒ | f(x)-f(a) | <ε

Definición de continuidad lateral izquierda:
f es continua por la izquierda en a si y solo si $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

∀ε>0∃δ>0 tal que 0<a-x<δ ⇒ | f(x)-f(a) | <ε

TEOREMA: f es continua en a si y solamente si ocurre lo siguiente

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Nota: tiene que cumplir que los limites laterales sean iguales es decir a f(a), no como ocurre en la definición de limite lateral que se acerca a L.

No es continua cuando rompe alguna regla.

Ejemplo: Determinar si es continua.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \le 0 \\ 1 & 0 < x \le 1 \\ x^2+1 & x > 1 \end{cases}$$

¿si es continua en 0?

$$\lim_{x \to 0^-} 2x + 1 = 2(0) + 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} 1 = 1$$

Existe el limite $\exists \lim_{x \to a} f(x)$

Existe el limite

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

al evaluar f(0), la función es continua en 0.

$$f(0) = \begin{cases} 2(0)+1=1 \\ 1=1 \\ (0)^2+1=1 \end{cases}$$

¿Si es continuo en 1?

$\exists f(x) \exists \lim_{x \to a} f(x)$

$$\lim_{x\to 1^+} x^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$$

$$\lim_{x\to 1^-} 1 = 1$$

No es continua en 1

$$\exists \lim_{x\to 1} f(x) = f(a)$$

2(1)+1=2+1=3

1=1

1^2+1=2

La función es continua a trozos:

(-∞,0]∪[0,1)∪(1, ∞)

2.6 CONTINUIDAD EN INTERVALOS.

Sea (a,b) un intervalo abierto, una función f es continua en a,b, si es continua en ∀x∇(a,b).

CONTINUIDAD EN INTERVALO CERRADO [a,b]

i) Que f sea continua en (a,b)

ii) Que sea continua por la derecha de a.

iii) Que sea continua por la izquierda de b.

EJEMPLOS:

Determinar si la función es continua o no lo es, y si es discontinua, ¿Donde está la discontinuidad?

a)

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x+1} & x \neq 1 \\ 0 & \mathrm{x} = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x+1} = \infty$$

Limites laterales distintos, discontinuidad en -1

$$\lim_{x \to -1} 0 \quad = 0$$

Por lo tanto es continua en cero.

b)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & x < 2 \\ x^3 & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2^-} x^3 \quad = 8$$
$$\lim_{x \to 2^+} x^2 + 4 \quad = 8$$
$$\lim_{x \to 2} x^3 \quad = 8$$

Limites laterales iguales, por lo tanto es continua en 8.

c)f(x)= |4- x^2|

El valor absoluto es continua en todos sus puntos

d)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} & x \neq 1 \\ -2 & x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 - 1}{x + 1} \quad = \infty$$
$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 - 1}{x + 1} \quad = -\infty$$
$$\lim_{x \to -1} -2 \quad = -2$$

Por lo tanto es continua en -2 pero no en -1

2.7 TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO.

Suponga que f es continua en [a,b], f(a)= A y f(b)=B, A≠B⇒$\forall_c$ entre A y B ∃x_o∇ (a,b) tal que f(x_o)=c.

Si p>0 $\forall_x$ tal que 0< |x-a|<p se observa que si h(x) ≤ f(x) ≤g(x)
Si
$$\lim_{x \to a} \boldsymbol{h\, x} = \boldsymbol{L} \wedge \lim_{x \to a} \boldsymbol{g\, x} = \boldsymbol{L} \Rightarrow \lim_{x \to a} \boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{L}$$

2.8 PROPIEDADES DE LÍMITES.

1) $\lim_{x\to 0} senx = 0$
2) $\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1$
3) $\lim_{x\to 0} cosx = 1$
4) $\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x} = 1$

a, b ^$k \nabla R$entre (a.f(a)) $\exists$ c entre a & b tal que f(c)=k

[a,b] ->

1) F es acotada en [a,b]
2) F es un valor mínimo m en [a,b]

Una función f es acotada en un intervalo [a,b] si y solo si $\forall x \nabla R\ tal\ que\ f(x) \leq k$

LIMITES INFINITOS

$\lim_{x\to a} f\ x\ = \infty$

- $\lim_{x\to a} f\ x\ = L$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0\ tal\ que\ x - a < \delta \to f\ x - L < \varepsilon$

Definición:

- $\lim_{x\to a} f\ x\ = \infty$

$\forall M > 0\ \exists \delta > 0\ tal\ que\ x - a < \delta \to f\ x > M$

- $\lim_{x\to a} f\ x\ = -\infty$

$\forall M < 0\ \exists \delta > o\ tal\ que\ \mathrm{x} - \mathrm{a} < \delta \to f\ \mathrm{x} < M$

Cuando “x” tienda a infinito su imagen será más cercana a “L”

$\lim_{x\to \infty} f\ x\ = L$

EJEMPLOS: Demostrar.-

1) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to a} f\ x = \infty$

$\forall M > 0\ \exists \delta > 0\ tal\ que\ x - a < \delta \to f\ x > M$

$\forall M > 0 \exists \delta > 0\ tal\ que\ x - 0\ < \delta \to \quad \frac{1}{x} > M$

Demostración:

$$\frac{1}{x} > M \rightarrow \frac{1}{x} > x$$

$$x - 0 < \frac{1}{m}$$

$$|x - 0 < \frac{1}{M} = \delta$$

$\therefore$ [illegible]

Calcula el límite:

❖ $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - x + 5}{4x^3 - 1}$ se multiplica por 1 $\frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}}$

$$\Rightarrow \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{5}{x^3}}{4 - \frac{1}{x^3}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{4 - \frac{1}{x^3}}$$

$$\Rightarrow \frac{\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x} - \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \to -\infty} \frac{5}{x^2}}{\lim_{x \to -\infty} 4 - \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{0}{4} = 0$$

❖ $\lim_{x \to \infty} \frac{3x + 4}{2x^2 - 5}$ se multiplica por 1 $\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}}{\frac{2x^2 - 5}{x^2}}$$

$$\frac{\lim_{x \to \infty} \frac{3}{x} \lim_{x \to \infty} \frac{4}{x^2}}{2x^2 - 5} = \frac{0 + 0}{0} = 0$$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\quad}{x^{2}}$

TEOREMA:

Si $R \exists z^{+} \rightarrow$

i) $\lim_{x\rightarrow 0^{+}} \frac{1}{x^{r}} = \infty$

ii) $\lim_{x\rightarrow 0^{-}} \frac{1}{x^{r}}$ $-\infty \quad r \quad impar$ $\infty \quad r \quad par$

TEOREMA:

$a \nabla R \lim_{x\rightarrow a} f\ x \ = 0 \quad \lim_{x\rightarrow a} g\ x \ = c$

C es constante, $c \neq 0\ \rightarrow$

i) C > 0 si f(x) -> 0 valores positivos de f(x) $\lim_{x\rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$

ii) C > 0 ^ f(x) -> 0 atravéz de valores negativos $f(x) \lim_{x\rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

iii) C > 0 -> 0 atravez de valores positivos $f(x) \lim_{x\rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$

iv) C < 0 -> 0 atravéz de valores negativos $de\ f\ x \rightarrow \lim_{x\rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$

TEOREMA:

i) $si \lim_{x\rightarrow a} f(x) = \infty$ ^ $\lim_{x\rightarrow a} g\,x = c, c = cte$
->$\lim_{x\rightarrow a} f\ x\ + g\ x\ = \infty$

ii) Si$\lim_{x\rightarrow a} f\ x = -\infty \quad \lim_{x\rightarrow a} g\ x = c$

$$c\ cte \rightarrow \lim_{x\to a} f\ x + g\ x\ = -\infty$$

TEOREMA:

$$si \lim_{x\to a} f\ x = \infty^{\lim_{x\to a} g\ x = c}$$

$c = cte \neq 0$

$$\rightarrow i)\ Si\ c > 0\ , \lim_{x\to a} f\ x * g\ x = \infty$$

$$ii)\ si\ c > 0, \lim_{x\to 0} F\ x * g\ x = -\infty$$

TEOREMA LIMITES EN EL INFINITO

$$si\ x\ \nabla\ Z^{+} \rightarrow$$

$$i) \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

$$j) \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

EJEMPLOS:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{3x}{\sin 5x}$

$$\rightarrow \frac{3x}{\sin 5x} \cdot \frac{5}{5} = \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{3}{5}$$

$$\rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{5x}{\sin 5x} = 1\ \ y\ \ \lim_{x\to 0} \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

$$1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{3x}{\sin 5x} = \frac{3}{5}$$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x^2}{x^2}$

$$\rightarrow \sin x^2 \cdot \frac{\sin x^2}{x^2}$$

$$\rightarrow \lim_{x\to 0} \sin x^2 = 0\ y\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1$$

$$1 * 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin^2x^2}{x^2} = 0$$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}$

$$\rightarrow \frac{\sin 3x}{2x}\cdot\frac{3}{3} = \frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3}{2}$$

$$\rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = 1 \;\; y \;\; \lim_{x\to 0}\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$1\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 2x}$

$$\rightarrow \frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{4x}{\sin 2x} = \frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{4}{2}$$

$$\rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x} = 1 \;\; y \lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x} = 1 \;\; y \;\; \lim_{x\to 0}\frac{4}{2} = \frac{4}{2}$$

$$1\cdot 1\cdot\frac{4}{2} = \frac{4}{2}$$

$$\rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 2x} = \frac{4}{2}$$

e) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x}$

$$\rightarrow \frac{\sin x^2}{x^2}\cdot x$$

$$\rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2} = 1 \;\; y \;\; \lim_{x\to 0} x = 0$$

$$1\cdot 0 = 0$$

$$\rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x} = 0$$

f) $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\tan 3x}$

$$\rightarrow \frac{\frac{2x}{1}}{\sin 3x} = 2x\cos 3x = \cos 3x\cdot 3x\cdot 2$$

$\cos 3x$ $\sin 3x$ $\sin 3x$ 3

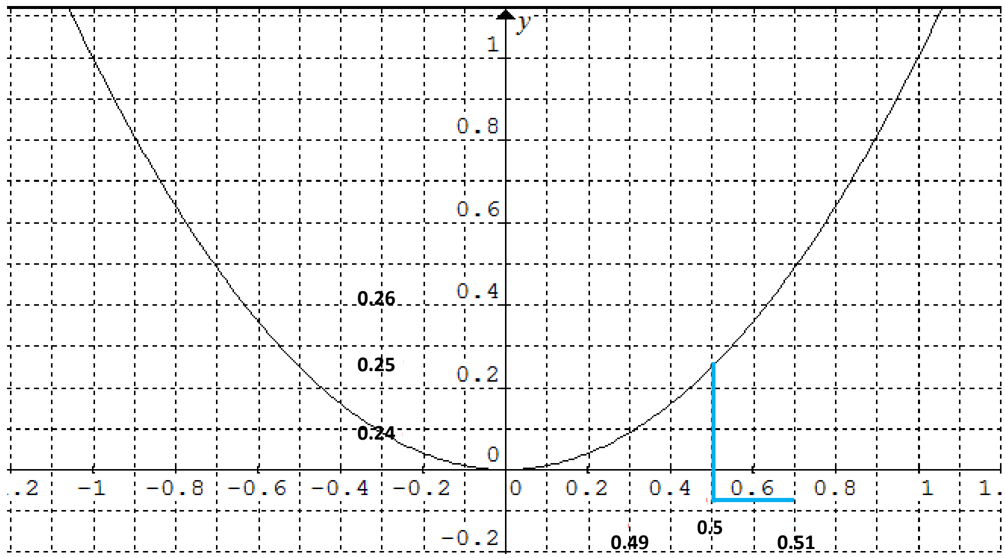
$$\rightarrow \lim_{x\to 0} \cos 3x = 1 \quad y \quad \lim_{x\to 0} \frac{3x}{\sin 3x} = 1 \quad y \quad \lim_{x\to 0} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{2x}{\tan 3x} = \frac{2}{3}$$

EJERCICIOS DEL BLOQUE II: LÍMITES

Ejercicio 18



Se proporcionan f(x), a, L y Ɛ. Utilice una figura y argumentos para determinar una δ>0 tal que Ɛ:
Si 0 <|x-a|< δ entonces |f(x)-L|< Ɛ
f(x)=x^2; a=0.5; L=0.25; Ɛ= 0.1

Solucion:

Entonces se necesita un valor de x_1 tal que f(x_1)=0.24 y un valor de x_2 tal que f(x_2)=0.26,asi que:

$\lim_{x\to 0.5}$
x^2=0.25
X_1^2=0.24
 = $\sqrt{0.24}$
 =0.49
X_2^2=0.26
 = $\sqrt{0.26}$
 =0.51

Como 0.5-0.49=0.01 y 0.51-0.5=0.01 se elige δ=0.01 y asi:
Si 0<|x-0.5|< 0.01 entonces |f(x)-0.25|<0.1

Ejercicio 16

Determine el limite y explique el teorema utilizado para dicho ejercicio:

$\lim_{x\to -1}(y^3 - 2y^2$+3y-4)

Solucion

→$(-1)^3$-2$(-1)^2$+3(-1)-4=-10

→$\lim_{x\to -1}$ ($y^3 - 2y^2$+3y-4)=-10

Se aplico el teorema: $\lim_{x\to a}(f\ x + g(x) + \cdots n(x)) = \lim_{x\to a} f\ x + \lim_{x\to a} g\ x +$
...$\lim x\to an(x)$

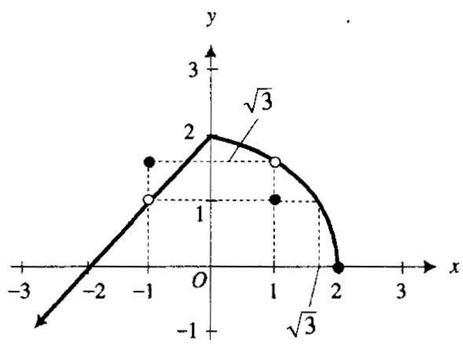
Ejercicio 58

El dominio de f(x) es (-∞,2].

a)Defina f(x) a trozos

b)¿Cuáles son los valores de f(-1), f(0), f(1) y f($\sqrt{3}$)?

c)¿Cuáles son los valores de $\lim_{x\to -1} f(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to 1} f(x)$, y $\lim_{x\to \sqrt{3}} f(x)$



Soluciones

a)

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & x\le 0 \\ \sqrt{4-\frac{2x^2}{2}} & x>0 \end{cases}$$

b)

- f(-1) = (-1)+2 =1
- f(0) = (0)+2=0
- f(1)= $\sqrt{4-\frac{2(1)^2}{2}} = \sqrt{3}$
- f($\sqrt{3}$)= $\sqrt{4-\frac{2(\sqrt{3})^2}{2}} = 1$

c)

- $\lim_{x\to -1} x+2=1$
- $\lim_{x\to 0} x+2=2$
- $\lim_{x\to 1} \sqrt{4-\frac{2x^2}{2}} = \sqrt{3}$
- $\lim_{x\to \sqrt{3}} \sqrt{4-\frac{2x^2}{2}} = 1$

Ejercicio 33

Sea f(x):

$$f(x)=\begin{cases} -1 & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } 0<x \end{cases}$$

Demuestre que $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe, y que $\lim_{x\to 0} |f(x)|$ existe

Solución:

Como:

$\lim_{x\to 0^-} f\ x = -1$

$\lim_{x\to 0^+} f\ x = 1$

Son distintos, entonces el $\lim_{x\to 0} f(x)$no existe.

Y como:

$\lim_{x\to 0^-}\ f\ x\ \ = -1 = 1$

$\lim_{x\to 0^+}\ f\ \ x\ \ = 1\ \ = 1$

Son iguales, entonces el $\lim_{x\to 0} |f(x)|$ existe

Ejercicio 30

Determine el limite analiticamente y apoye la respuesta trazando la grafica de la funcion en la graficadora.

Solucion

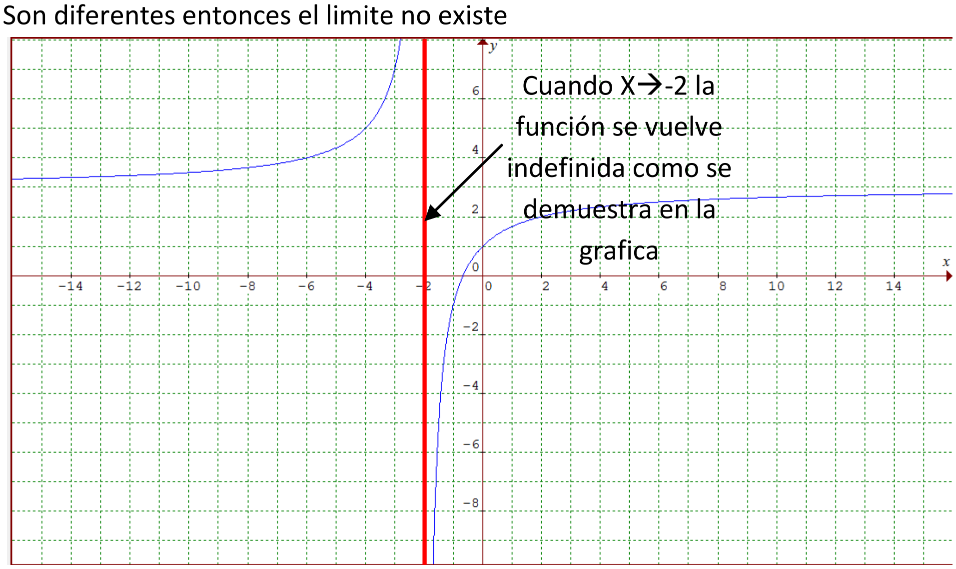
$\lim_{x\to -2^+} \frac{6x^{\ 2}+x-2}{2x^{\ 2}+3x-2}$

Como el:

$\lim_{x\to -2^+} \frac{6x^{\ 2}+x-2}{2x^2+3x-2} \to \frac{3x+2\ \cancel{2x-1}}{\cancel{2x-1}\ x+2} = -\infty$

$\lim_{x\to -2^-} \frac{6x^{\ 2}+x-2}{2x^2+3x-2} \to \frac{3x+2\ \cancel{(2x-1)}}{\cancel{2x-1}\,(x+2)} = +\infty$

Son diferentes entonces el limite no existe



Ejercicio 17

La funcion es discontinua en el numero “a”.

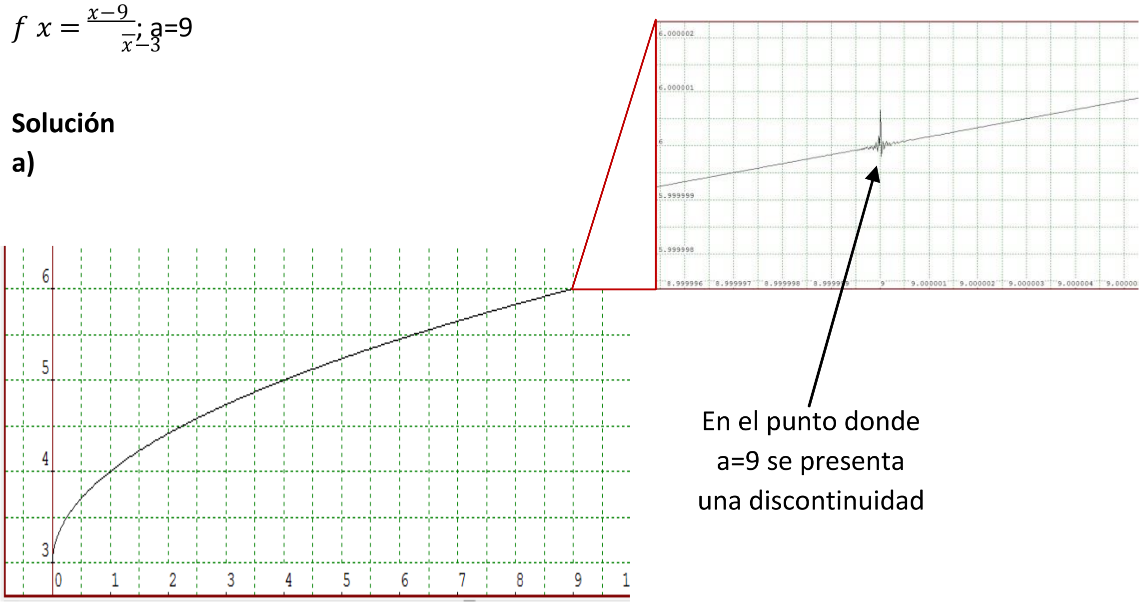
a)Trace la grafica de "f" en un rectangulo de inspeccion conveniente y determine que la grafica se rompe en el punto donde x=a. ¿Parece ser removible o esencial esta discontinuidad?. Si parece ser removible, especule sobre como debe redefinirse f(a) de modo que la discontinuidad sea eliminada.

b)Confirme analiticamente la respuesta del inciso(a)

$f(x)=\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$; a=9

Solución

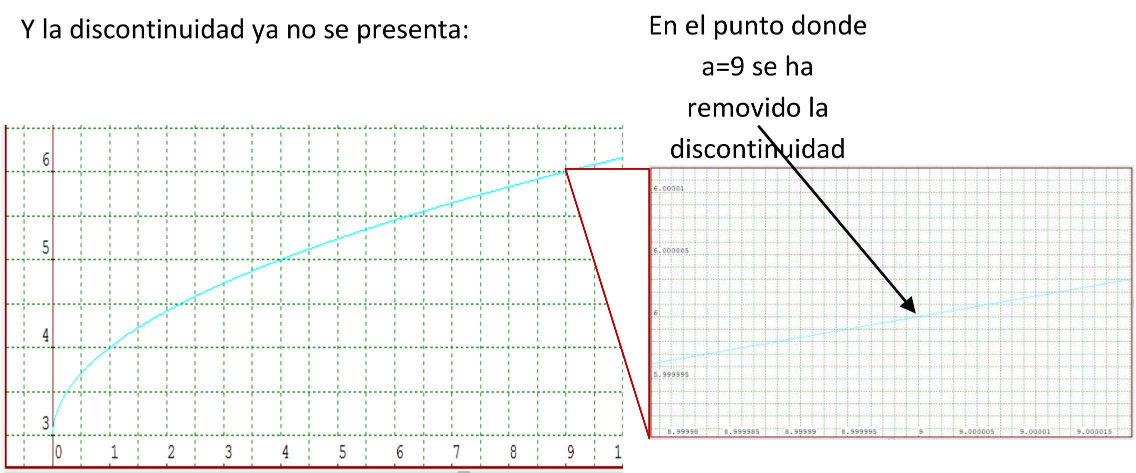
a)



Se puede redefinir multiplicando por 1 la función quedando de esta manera:

$$f(x)=\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}\rightarrow\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}\cdot\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}=\frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)}=\sqrt{x}+3$$

Y la discontinuidad ya no se presenta:



b) Ahora confirmemos analíticamente la respuesta del inciso (a)

Para confirma que la discontinuidad se removió se deben cumplir las condiciones de:

i) f(x) existe

ii) $\lim_{x\to a} f(x)$ existe

iii) $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

Así:

i) $f(x) = \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \to \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)} = \sqrt{x}+3$ existe

ii) $\lim_{x\to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \to \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)} = \sqrt{x}+3 = \sqrt{9}+3 = 6$, el límite existe.

iii) $\lim_{x\to 9} \sqrt{x}+3 = \sqrt{(9)}+3$

Como las 3 condiciones se cumplen en "a" entonces se dice que la función es continua en "a"

Ejercicio 59

De un ejemplo de dos funciones que sean discontinuas en un numero "a", pero cuya suma sea continua en "a".

Solución

No existe una suma de función que sea continua si las funciones usadas en la suma no son continuas y por teorema si F y G son funciones continuas, entonces la suma de las funciones F y G es continua.

Ejercicio 39

Determine si se cumple el teorema del valor intermedio para la función "f", el intervalo cerrado [a,b] y el valor de k indicado. Si el teorema no se cumple, establezca la razón y apoye gráficamente su respuesta. Si el teorema se cumple: **a)** trace la grafica de "f" y la recta y=k en la grafica y estime, con cuatro cifras decimales, el numero C del intervalo (a,b) tal que f(c)=k. **b)** Confirme la estimación del inciso (a) analíticamente. **c)** Dibuje la grafica de "f" en *a,b+ y muestre el punto (c,k).

$f(x) = \frac{4}{x+2}$; [a,b]=[-3,1]; k=$\frac{1}{2}$

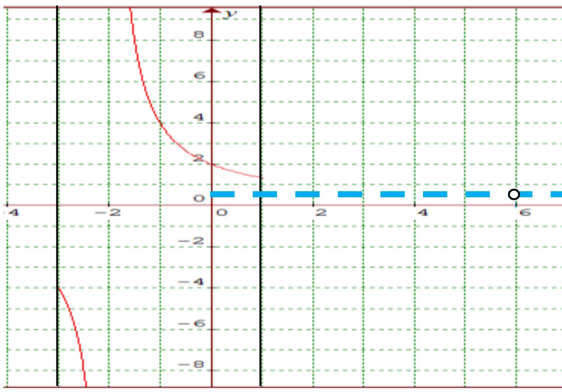
Solución

Dada la función $f(x) = \frac{4}{x+2}$ definida en el intervalo cerrado [-3,1] queremos encontrar el valor C tal que f(c)=$\frac{1}{2}$

Entonces igualamos la función a 1 y resolvemos:

$\frac{4}{x+2} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{4}{x+2} - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow \frac{8-(x+2)}{2(x+2)} = 0 \rightarrow \frac{6-x}{2x+4} = 0$, por lo tanto x=6, pero 6 no está en el intervalo cerrado establecido de [-3,1]

En la siguiente grafica se puede notar lo explicado anteriormente:



Las líneas negras representan los números máximos del intervalo establecido.
La línea azul punteada nos muestra el punto (c,k).
El círculo tiene las coordenadas ($\frac{1}{2}$6).

Y así apreciamos que el valor C no está contemplado dentro del intervalo establecido

Ejercicio 26

Demuestre que el límite es el número indicado aplicando la definición; esto es, para cualquier Ɛ>0, determine una δ>0 tal que:
Si 0<|x-a|< δ entonces |f(x)-L|< Ɛ

$\lim_{x \to \frac{1}{3}} \frac{1-9x^2}{1-3x} = 2$

→|f(x)-L|< Ɛ

→$|(\frac{1-9x^2}{1-3x}) - 2| = |\frac{1-9x^2-(2-6x)}{1-3x}| = |\frac{-9x^2+6x-1}{1-3x}| = \frac{9x^2-6x+1}{1-3x}| = |\frac{\cancel{1-3x}(1-3x)}{\cancel{(1-3x)}}|$

→$|3||x-\frac{1}{3}|<$ Ɛ

→$|x-\frac{1}{3}|< \frac{Ɛ}{3} = δ$

Ejercicio 68

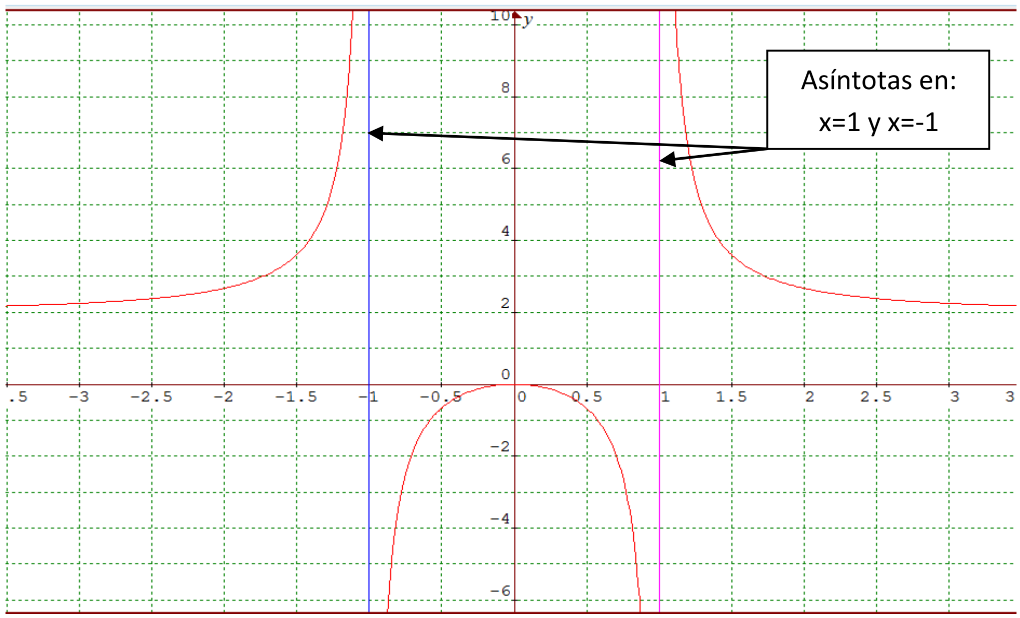
Determine las asíntotas verticales de la grafica de la función y utilícelas para dibujar la grafica

$x = \frac{2x}{x^2-1}$

Solución

Las asíntotas de esa función son las rectas en donde la función no está definida.

En este caso las asíntotas de la función son x=1 y x=-1

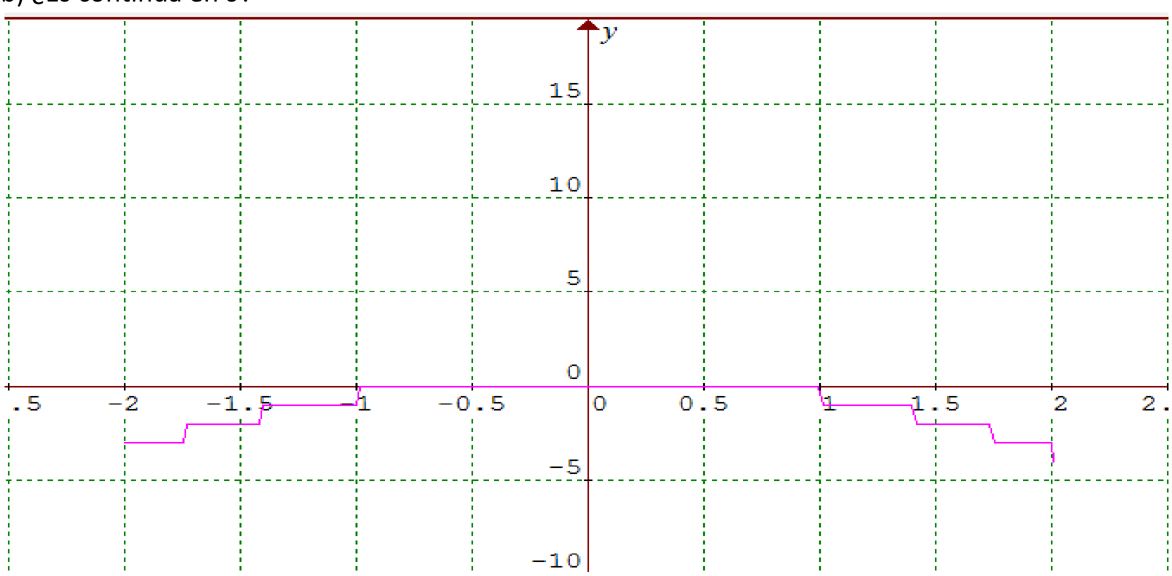


Ejercicio 110

Dibuje la grafica de f si f(x)= [[1-x^2]] y -2 ≤ x ≤ 2

a) ¿Existe $\lim_{x\to 0} f(x)$?

b) ¿Es continua en 0?



a) $\lim_{x\to 0}\ 1 - x^2\ = 1$ por lo tanto si existe el limite

b) Si el limite existe cuando x→0 entonces es continua en 0

3.1 DEFINICIÓN.

Una función f es diferenciable en x si y solo si

$$f\ x\ = \lim_{\to 0} \frac{f\ x+ \quad - f(x)}{} existe$$

- $\lim_{x \to x_0} \frac{f\ x\ - f(x_0)}{x - x_0}$

Derivar por la definición f(x)=x^2

f'(x)=lim $\frac{f\ x+ \quad -f\ x}{\to_0 \quad \to} \frac{x+ \quad ^2 - x^2}{= \; - \quad -} \frac{x^2 + 2x \quad + \quad ^2 \; -x^2}{=} \frac{(2x+ \quad)}{}$

$$\to \lim_{\to 0} 2x + \quad = 2x = f'(x)$$

f'(x)= $\lim_{x \to x_0} \frac{f\ x\ - f(x_0)}{x - x_0} \to \frac{x^2 - x_0^2}{\cancel{x - x_0}} = \frac{\cancel{x + x_0\ x - x_0}}{x - x_0} = x + x_0$

$$\to \lim_{x \to x_0} x + x_0 = 2x_0$$

Derivar por la definición f(x)=mx+b

f'(x)=lim $\frac{f\ x+ \quad -f\ x}{\to_0 \quad \to} \frac{m\ x+ \quad +b- \text{ mx} + \text{b}}{\to} \cancel{mx + m \quad + b - mx - b} =$

$\frac{m}{m} = \frac{(m)}{} =$

$$\to \lim_{\to 0} m = m = f'(x)$$

$$f'(x)= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to \frac{mx \cancel{+b} - mx_0 \cancel{-b}}{x-x_0} = \frac{mx-mx_0}{x-x_0} = \frac{m\cancel{(x-x_0)}}{\cancel{x-x_0}} = m$$

$$\to \lim_{x\to x_0} m = m$$

EJEMPLO:

1. $f(x)=2+3x-x^2$

$$f'\, x = \lim_{\to 0} \frac{f\, x + \quad - f\, x}{}$$

$$\to \frac{2 + 3\, x + \quad - x + \quad {}^2 - 2 + 3x - x^2}{}$$

$$\to \frac{2 + 3x + 3 \quad - x^2 - 2x \quad - \quad {}^2 - 2 - 3x + x^2}{} = \frac{3 \quad - 2x \quad - {}^2}{} = \frac{3 - 2x -}{}$$

$$\to \lim_{\to 0} 3 - 2x - \quad = 3 - 2x = f'(x)$$

$$f'(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f\, x - f(x_0)}{x - x_0} \to \frac{2+3x-x^2 - 2+3x_0-x_0^2}{x-x_0} = \frac{2+3x-x^2-2-3x_0+x_0^2}{x-x_0} = \frac{3x-x^2-3x_0+x_0^2}{x-x_0}$$

$$= \frac{3\, x-x_0}{x-x_0} - \frac{x-x_0\, x+x_0}{x-x_0} = 3 - x - x_0$$

$$\to \lim_{x\to x_0} 3 - x - x_0 = 3 - 2x_0$$

3.2 RECTA TANGENTE Y RECTA NORMAL.

Una función f es diferenciable y $p(x_0, f(x_0)$ es un punto de su gráfica, si f es diferenciable en x_0 entonces la tangente en ese punto tiene como pendiente $f'(x_0)$

$$x_0 f\, x_0$$

$$y = mx + b$$

$$y = f'\; x_0\, x - x_0\; + f\; x_0$$

$$m = \frac{-1}{m}$$

$$y = \frac{-1}{f'(x_0)}\, x - x_0 + f\; x_0$$

$$f'(x_0) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\to f'\, x_0\; x_2 - x_1 = y_2 - y_1$$

$$f'\; x_0\, x - x_0\; = y - f\; x_0$$

$$\frac{-1}{f'(x_0)} \; x - x_0 = y - f \; x_0$$

Una función es diferenciable en un Punto x si solo si

$$\lim_{\to 0} \frac{f \; x + \quad - f(x)}{} \quad \exists$$

3.3 OPERACIONES DE DERIVADAS.

Sea $\alpha \nabla R$ & f, g diferenciables en x

$\rightarrow f + g$ es diferenciable en x

$i) \; f + g^{'} \; x = f'(x) \pm g^{'}(x)$

$ii) \; \alpha f^{'} \; x = \alpha f^{'}(x)$

3.4 REGLA DEL PRODUCTO.

Si f & g son diferenciables en x también lo es su producto.

$\rightarrow f * g^{'} \, x = f^{'} \, x \; g \; x + g^{'} \, x \; f(x)$

3.5 REGLA DEL EXPONENTE.

$N \nabla Z \quad n \neq -1$

$P \; x = x^n$

$p^{'} x = n x^{n-1}$

3.6 REGLA DE LA RECIPROCA.

Si g es diferenciable en x y g(x) es diferente de 0 entonces

$\frac{1}{g}$ -> $\frac{1}{g}^{'} \; x = \frac{-g^{'} \; x}{g \; x^{\;2}}$

3.7 REGLA DE COCIENTE.

Si f & g son diferenciables en x y g(x) diferente de 0 -> f/g son diferenciables en x.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

3.8 REGLA DE LA CADENA.

Si g es diferenciable en x y f diferenciable en g(x) entonces la composición f°g es diferenciable en f y se efectúa de la siguiente forma

(f°g)’(x)=f´(g(x))*g’(x)

3.9 DERIVADA DE ORDEN SUPERIOR.

$$\frac{df}{dx} = f'(x)$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = f''(x)$$

$$\frac{d^3f}{dx^3} = f'''(x)$$

3.10 DERIVADAS DE IDENTITADES TRIGONOMETRICAS.

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\cot x = 1 - \csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \tan x * \sec x$$

$$\frac{d}{dx}\csc x = \frac{-cosx}{sen^2}$$

3.11 DERIVADA DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS.

Definición: Si Z en racional entonces $\ln e^z = Z$ con esto tenemos que el inverso a la exponencial

3.12 MAXIMOS Y MINIMOS.

Decimos que f tiene un máximo local el “c” <->$f\ \ x$ ∀x cerca de “c”

$$c \nabla\ a,b\ ,f\ c \geq f\ x\ \forall x \nabla [a.b]$$

F tiene un mínimo local en c <->$f\ c \geq f\ x \forall\ cerca\ de\ c$

TEOREMAS:

Si f tiene un máximo o un mínimo local en c entonces f’(c)=0 aplicado en el punto c

3.13 DEFINICION DE PUNTO CRÍTICO.

Dada una función f el número c en el dominio de f para los cuales f’(c)=0 o existe, se denominan puntos críticos en f.

3.14 CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA.

Supongamos que f’(c)=0 y que f’’(c) existe

i) F’’(c)>0 -> f(c) mínimo local
ii) F’’(c)<0 -> f(c) máximo local

3.15 REGLA L'HOPITAL.

(0/0)

1) Sea f, g funciones diferenciables ^ g'(x) diferente a 0
2) F(x) ->0
3) G(x) ->0
4) $x \to c, x \to c^{+}, x \to c^{-}, x \to \infty, x \to -\infty$
5) Si $\frac{f' \; x}{g \; x} \to L$

   $\frac{f(x)}{g(x)} \to L$

$\frac{\infty}{\infty}$

Sea f, g una función diferenciable ^g'(x) diferente de 0

1) 1) F(x) ->∞
2) G(x) ->∞
3) $x \to c, x \to c^{+}, x \to c^{-}, x \to \infty, x \to -\infty$

EJERCICIOS DEL BLOQUE III: DERIVADAS.

1. Efectuar derivada de cada una de las siguientes funciones por la definición:

a) f(x)=5x-x²

$\lim_{\to 0} \frac{f\ x+\ \ -f\ x}{\to} \quad \frac{5\ x+\ \ -\ x+\ \ ^2-\ 5x-x^2}{} = \frac{\cancel{5x}+5 ? \cancel{-x^2}+2x ? + ?}{} = \frac{?}{5+2x+?} \to$

$\to \lim_{\to 0} 5+2x+ \quad = 5+2x$

b) f(x)=x⁴

$\lim_{\to 0} \frac{f\ x+\ \ -f\ x}{\to} \quad \frac{x+\ \ ^4-\ x^4}{} = \frac{\cancel{x^4}+4x^3 ? +6x^2 ?}{} = \frac{? \ 4x^3+6x}{^2 ? +4x ? \ ^2} \to$

$\to \lim_{\to 0} 4x^3+6x^2 \quad +4x \quad ^2 = 4x^3$

c) f(x)= $\frac{1}{x^2}$

$\lim_{\to 0} \frac{f\ x+\ \ -f}{x} \to \frac{\frac{1}{(x+\ \ )^2} - \frac{1}{x^2}}{} = \frac{\cancel{x^2}-\ ^2-2x ? - ? ^2}{} = \frac{? (-2x- ?)}{? (x^4+2x} \to$

$\to \lim_{\to 0} \frac{-2x-}{x^4+2x} \quad \frac{-2x}{x^4}$

3 + 4 =

d) f(x)= $\sqrt{x-1}$

$\lim_{\to 0} \frac{f\ x+\ \ -f\ x}{} \to \frac{\sqrt{x+\ \ -1}-\sqrt{x-1}}{} = \frac{}{(\sqrt{x+\ \ -1}+\sqrt{x-1})} = \frac{1}{\sqrt{x+\ \ -1}+\sqrt{x-1}} \to$

$\to \lim_{\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\ \ -1}+\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

e) f(x)= $\frac{1}{x+3}$

$\lim_{\to 0} \frac{f\ x+\ \ -f}{x} \to \frac{\frac{1}{x+\ \ +3} - \frac{1}{x+3}}{} = \frac{\frac{x+3}{} - (x+\ \ +3)}{(x+3\ \ +3)} = \frac{-}{x^2+x\ \ +3x+3x+3\ \ +9} = \frac{-}{x^2+x\ \ +6x+3\ \ +9} =$

$\frac{-1}{x^2+x\ \ +6x+3\ \ +9} \to$

$\to \lim_{\to 0} \frac{-1}{x^2+x\ \ +6x+3\ \ +9} = \frac{-1}{x^2+6x+9} = \frac{-1}{(x+3)^2}$

f) f(x)= $\frac{1}{\sqrt{x}}$

$\lim_{\to 0} \frac{f\ x+\ \ -f}{x} \to \frac{\frac{1}{\sqrt{x+\ \ }} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{} = \frac{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+\ \ }}{\sqrt{x}\sqrt{x+\ \ }}}{} = \frac{\frac{-}{\sqrt{x+\ \ }\ \sqrt{x}\ (\sqrt{x}+\sqrt{x+\ \ })}}{} = \frac{-1}{\sqrt{x+\ \ }\ \sqrt{x}\ (\sqrt{x}+\sqrt{x+\ \ })} \to$

$\to \lim_{\to 0} \quad \frac{-1}{} \quad = \frac{-1}{} = \frac{-1}{}$

$x+$ $-x$ $x+$ $x+$ $x(2\ \ x)$ $x(2\ \ x^3)$

2. Hallar la ecuación de la tangente y de la normal en la grafica de ‘f’ en el punto a, f a para los valores de ‘f’ en ‘a’

a) $f(x)= x^2$ en $a=2$

$f'\ x = 2x$

$f'\ a = 4$=m

Tangente

$(x-x_0)(m)= (y-y_0)$

→(x-2)(4)= (y-4)

→4x-8= y-4

→y=4x-4

Normal

$(X-X_0)(1/-m)=(Y-Y_0)$

→(x-2)(1/-4)= (y-4)

→(x/-4)+1/2= (y-4)

→y=(x/-4)+9/2

b) $f(x)= 5x-x^2$ en $a=4$

$f'\ x = 5-2x$

$f'\ 4 = -3$=m

Tangente

$(x-x_0)(m)= (y-y_0)$

→(x-4)(-3)= (y-4)

→-3x+12= y-4

→y=-3x-16

Normal

$(X-X_0)(1/-m)=(Y-Y_0)$

→(x-4)(1/3)= (y-4)

→(x/3)-4/3= (y-4)

→y=(x/3)+8/3

c) $f(x)=\sqrt{x}$ en a=4

$f'\ x = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'\ 4 = \frac{1}{4}$=m

Tangente

$(x-x_0)(m)= (y-y_0)$

→(x-4)(1/4)= (y-2)

→(x/4)-1= y-2

→y=(x/4)+1

Normal

$(X-X_0)(1/-m)=(Y-Y_0)$

→(x-4)(-4)= (y-2)

→(-4x)+16= (y-2)

→y=(-4x)+18

d) f(x)= $\frac{1}{x^2}$ en a=-2

$f'(x) = \frac{-2}{x^3}$

$f'(-2) = \frac{1}{4}$=m

Tangente

$(x-x_0)(m)= (y-y_0)$

→(x+2)(1/4)= (y-(1/4))

→(x/4)+1/2= y-(1/4)

→y=(x/4)+3/4

Normal

$(X-X_0)(1/-m)=(Y-Y_0)$

→(x+2)(-4)= (y-(1/4))

→(-4x)-8= (y-(1/4))

→y=-4x-(31/4)

e) f(x)= 5-x^2 en a=2

$f'(x) = -2x$

$f'(2) = -4$=m

Tangente

$(x-x_0)(m)= (y-y_0)$

→(x-2)(-4)= (y-1)

→(-4x+8)= y-1

→y=-4x+ 9

Normal

$(X-X_0)(1/-m)=(Y-Y_0)$

→(x-2)(1/4)= (y-1)

→(x/4)-1/2= y-1

→y=(x/4)+1/2

f) f(x)= $\frac{1}{x+3}$ en a=-1

$f'(x) = \frac{-1}{(x+3)^2}$

$f'(-1) = \frac{-1}{4}$=m

Tangente

$(x-x_0)(m)= (y-y_0)$

→(x+1)(-1/4)= (y-(1/2))

→(-x/4)+(-1/4)= y-(1/2)

→y=(-x/4)+1/4

Normal

$(X-X_0)(1/-m)=(Y-Y_0)$

→(x+1)(4)= (y-(1/2))

→4x+4= y-(1/2)

→y=4x+(9/2)

3. Qué función es diferenciable

a) f(x)=|x+1|

$$\lim_{\to 0^+} \frac{f\ x+\quad -f(x)}{} \to \frac{x+\quad +1\ -|x+1|}{} = - = 1$$

$$\lim_{\to 0^-} \frac{f\ x+\quad -f(x)}{} \to \frac{-\ x+\quad +1\ +|x+1|}{} = \frac{-}{} = -1$$

-1≠1

∴No es diferenciable en -1

b) f(x)=|2x+5|

$$\lim_{\to 0^+} \frac{f\ x+\quad -f(x)}{} \to \frac{2x+2\quad +5\ -|2x+5|}{} = \frac{2}{} = 2$$

$$\lim_{\to 0^-} \frac{f\ x+\quad -f(x)}{} \to \frac{-\ 2x+2\quad +5\ +|2x+5|}{} = \frac{-2}{} = -2$$

-2≠2

∴No es diferenciable en -2.5

c) f(x)= $\overline{x}$

$$\lim_{\to 0^+} \frac{f\ x+\quad -f(x)}{} \to \frac{x+\quad -\ x}{} = \frac{1}{\overline{x+}\quad +\ x} = \frac{1}{2\ \overline{x}}$$

$$\lim_{\to 0^-} \frac{f\ x+\quad -f(x)}{} \to \frac{x+\quad -\ x}{} = \frac{1}{\overline{x+}\quad +\ x} = \frac{1}{2\ \overline{x}}$$

$\frac{1}{2\ \overline{x}} = \frac{1}{2\ \overline{x}}$

∴Es diferenciable

d) f(x)= $\begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 2 \\ 3 & x > 2 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f\ x - f(2)}{x-2} \to \frac{x^2 - 1\ \ -3}{x-2} = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{\cancel{x-2}\,(x+2)}{\cancel{x-2}} = 4$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f\ x - f(2)}{x-2} \to \frac{3\ \ -3}{x-2} = \frac{0}{x-2} = 0$$

$4 \neq 0$

∴No es diferenciable

4. Hallar f ’ x si existe

a)

$$f(x)=\begin{cases} 4x & x<1 \\ 2x^2+2 & x\geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f\ x-f(1)}{x-1} \to \frac{4x-4}{x-1} = \frac{4(x-1)}{x-1} = 4$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f\ x-f(1)}{x-1} \to \frac{2x^2+2-4}{x-1} = \frac{2x^2-2}{x-1} = \frac{2\ x+1\ (x-1)}{x-1} = 2x+2 = 4$$

$4 = 4$

∴Es diferenciable

$$f'(x)=\begin{cases} 4 & x<1 \\ 4x & x\geq 1 \end{cases}$$

b)

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2 & x<1 \\ 2x^3+1 & x\geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f\ x-f\ 1}{x-1} \to \frac{2x^3+1-3}{x-1} = \frac{2\ x^3-1}{x-1} = 2\ x^2+x+1 \ = 6$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f\ x-f(1)}{x-1} \to \frac{3x^2-3}{x-1} = \frac{3(x^2-1)}{x-1} = \frac{3\ x+1\ (x-1)}{x-1} = 3x+3 = 6$$

$6 = 6$

∴Es diferenciable

$$f'(x)=\begin{cases} 6x & x<1 \\ 6x^2 & x\geq 1 \end{cases}$$

5. Derivar las funciones

a) f(x)= $\frac{x^{2}+4}{x^{3}}$

$$f'\ x = \frac{2x\ x^3-3x^2(x^2+4)}{x^6} = \frac{2x^4-3x^4-12x^2}{x^6} = \frac{-x^4+12x^2}{x^6} = \frac{-x^4+12x^2}{x^6}$$

b) f(x)= (x-1)(x-2)

$$f'(x) = (x-2) + (x-1) = 2x-3$$

c) f(x)= $\frac{6-\frac{1}{x}}{x-2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x^2}(x-2)-(6-\frac{1}{x})}{(x-2)^2} = \frac{\frac{1}{x^2}}{x-2} - \frac{(6-\frac{1}{x})}{(x-2)^2}$$

d) f(x)= $\frac{1+x^4}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{4x^3x^2-2x(1+x^4)}{x^4} = \frac{4x^3}{x^2} - \frac{2x(1+x^4)}{x^4}$$

e) f(x)= $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + \frac{-2}{x^3}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^4} = -\frac{3}{x^4} - \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2}$$

f) f(x)= $(9x^8-8x^9)\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$$f'(x) = (72x^7-72x^8)\left(x+\frac{1}{x}\right) + \left(1-\frac{1}{x^2}\right)(9x^8-8x^9) \ldots.$$

$$=72x^8+72x^6-72x^9-72x^7+9x^8-8x^9-9x^6+8x^7=-80x^9+81x^8-64x^7+63x^6$$

6. Hallar f ‘(0) y f ‘(1)

a) f(x)= $\frac{2x^2+x+1}{x^2+2x+1}$

$$f'(x) = \frac{(2x^2+x+1)'(x+1)^2-2(x+1)(2x^2+x+1)}{((x+1)^2)^2} = \frac{(2x^2+x+1)'}{(x+1)^2} - \frac{2(2x^2+x+1)}{(x+1)^3}$$

$$f'(0) = -1$$

$$f'(1) = \frac{1}{4}$$

b) f(x)= $\frac{1-x^2}{1+x^2}$

$$f'(x) = \frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x}{1+x^2} - \frac{2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$f'(0) = 0$

$f'(1) = -1$

c) f(x)= $x^2(x+1)$

$f'(x) = 2x(x+1) + x^2 = 2x^2 + 2x + x^2 = 3x^2 + 2x$

$f'(0) = 0$

$f'(1) = 5$

d) f(x)=$\frac{ax^2+bx+c}{cx^2+bx+a}$

$$f'(x) = \frac{(2ax+b)(cx^2+bx+a)-(2cx+b)(ax^2+bx+c)}{(cx^2+bx+a)^2} = \frac{2ax+b}{cx^2+bx+a} - \frac{(2cx+b)(ax^2+bx+c)}{(cx^2+bx+a)^2}$$

$f'(0) = \frac{b}{a} - \frac{bc}{a^2}$

$f'(1) = \frac{2a+b}{c+b+a} - \frac{(2c+b)(a+b+c)}{(c+b+a)^2}$

7. Sabiendo que h(0)=3 y h'(0)=2, hallar f'(0)

a) f(x)= x h(x)

$f'(x) = \quad (x) + \quad '(x)\, x$

$\rightarrow f'(0) = 3$

b) f(x)=(3x^2)(h(x))-5x

$f'(x) = 6x \quad (x) + \quad '(x)\, 3x^2 - 5$

$\rightarrow f'(0) = -5$

c) f(x)= $\quad (x) - \frac{1}{\quad (x)}$

$f'(x) = \quad '(x) + \frac{\quad '(x)}{\quad (x)^2}$

$\rightarrow f'(0) = 2 + \frac{2}{9}$

d) f(x)=h(x)+ $\frac{x}{(x)}$

$f' \ x \ = \ \ ' \ x + \frac{x \ -}{(x)^{\ 2}} \ ' \ x \ x$

$\rightarrow f' \ 0 = 2 + \frac{3}{9}$

8. Hallar la ecuación para la recta tangente a la grafica ‘f’ en el punto (a, f(a))

a) f(x)= $\frac{x}{x+2}$ en a=-4 → f(a)=2

$f' \ x = \frac{(x+2)-x}{(x+2)^2}$

$f' \ a = \frac{1}{2} = m$

Tangente

$(x-x_0)(m)= (y-y_0)$

→(x+4)(1/2)= (y-2)

→(x/2)+2= y-2

→y=(x/2)+4

b) f(x)= $x^2 + \frac{10}{x}$ en a=-2 →f(a)=-1

$f' \ x = 2x + \frac{-10}{(x)^2}$

$f' \ a = \frac{-26}{4} = m$

Tangente

$(x-x_0)(m)= (y-y_0)$

→(x+2)(-26/4)= (y+1)

→(-26x/4)-13= y+1

→y=(-26x/4)-14

9. Hallar y'''

a) $y=\frac{x^3+1}{x^3-1}$

$$y'=\frac{3x^2(x^3-1)-3x^2(x^3+1)}{(x^3-1)^2}=\frac{3x^2}{x^3-1}-\frac{3x^2(x^3+1)}{(x^3-1)^2}$$

$$y''=\frac{6x(x^3-1)-3x^2(3x^2)}{(x^3-1)^2}-\frac{[6x(x^3+1)+3x^2(3x^2)](x^3-1)^2-2(x^3-1)(3x^2)3x^2(x^3+1)}{((x^3-1)^2)^2}\ \ldots$$

$$=\frac{6x}{x^3-1}-\frac{3x^2\,3x^2}{(x^3-1)^2}-\frac{6x(x^3+1)}{(x^3-1)^2}+\frac{3x^2\,3x^2}{(x^3-1)^2}-\frac{2(3x^2)3x^2(x^3+1)}{(x^3-1)^3}$$

$$y'''=\frac{6(x^3-1)-3x^2\,6x}{(x^3-1)^2}-\frac{[6(x^3+1)+3x^2(6x)](x^3-1)^2-2(x^3-1)3x^2\,6x(x^3+1)}{((x^3-1)^2)^2}-\cdots$$

$$\ldots-\frac{[72x^3(x^3+1)+3x^2\,18x^4](x^3-1)^3-3(x^3-1)^2\,3x^2\,18^4(x^3+1)}{((x^3-1)^3)^2}=\cdots$$

$$\ldots=\frac{6}{x^3-1}-\frac{3x^2\,6x}{(x^3-1)^2}-\frac{6(x^3+1)}{(x^3-1)^2}-\frac{3x^2(6x)}{(x^3-1)^2}+\frac{36x^3(x^3+1)}{(x^3-1)^3}+\frac{3x^2\,18x^4}{(x^3-1)^3}-\frac{3(3x^2)18^4(x^3+1)}{(x^3-1)^4}$$

b) $y=\frac{x^4}{2x^3-1}$

$$y'=\frac{4x^3(2x^3-1)-6x^2(x^4)}{(2x^3-1)^2}=\frac{4x^3}{2x^3-1}-\frac{6x^2(x^4)}{(2x^3-1)^2}$$

$$y''=\frac{12x^2(2x^3-1)-6x^2(4x^3)}{(2x^3-1)^2}-\frac{[12x(x^4)+4x^3(6x^2)](2x^3-1)^2-2(2x^3-1)6x^2(6x^2)(x^4)}{((2x^3-1)^2)^2}=\cdots$$

$$\ldots=\frac{12x^2}{2x^3-1}-\frac{6x^2\,4x^3}{(2x^3-1)^2}-\frac{12x(x^4)}{(2x^3-1)^2}-\frac{4x^3\,6x^2}{(2x^3-1)^2}+\frac{(2)6x^2\,6x^2\,x^4}{(2x^3-1)^3}$$

$$y'''=\frac{24x(2x^3-1)-6x^2\,12x^2}{(2x^3-1)^2}-\frac{[12x(4x^3)+12x^2(6x^2)](2x^3-1)^2-2(2x^3-1)6x^2\,6x^2\,4x^3}{((2x^3-1)^2)^2}-\cdots$$

$$\ldots-\frac{[12(x^4)+4x^3(12x)](2x^3-1)^2-2(2x^3-1)6x^2\,12x(x^4)}{((2x^3-1)^2)^2}-\cdots$$

$$\ldots-\frac{[12x(4x^3)+12x^2(6x^2)](2x^3-1)^2-2(2x^3-1)6x^2\,6x^2\,4x^3}{((2x^3-1)^2)^2}+\cdots$$

$$\ldots+\frac{576x^7(2x^3-1)^3-3(2x^3-1)^2\,6x^2\,72x^8}{(2x^3-1)^6}=\cdots$$

$$\ldots=\frac{24x}{2x^3-1}-\frac{6x^2\,12x^2}{(2x^3-1)^2}-\frac{12x\,4x^3}{(2x^3-1)^2}-\frac{12x^2\,6x^2}{(2x^3-1)^2}+\frac{2\,6x^2\,6x^2\,4x^3}{(2x^3-1)^3}-\frac{12\,x^4}{(2x^3-1)^2}-\frac{4x^3\,12x}{(2x^3-1)^2}+\cdots$$

$$\ldots+\frac{12x^2\,12x\,x^4}{(2x^3-1)^3}-\frac{12x\,4x^3}{(2x^3-1)^2}$$

$$-\frac{12x^2\,6x^2}{2x^3-1^2} \qquad \frac{12x^2\,6x^2\,4x}{3} + 2x^3-1 \qquad 3 + \qquad \frac{576x^7}{2x^3-1^3} - \frac{3\,6x^2\,72x^8}{2x^3-1^4}$$

c) $y=\frac{x^2}{1-x}$

$$y'=\frac{2x(1-x)+x^2}{(1-x)^2}=\frac{2x}{1-x}+\frac{x^2}{(1-x)^2}$$

$$y''=\frac{2(1-x)+2x}{(1-x)^2}+\frac{2x(1-x)^2+2(1-x)x^2}{(1-x)^4}=\frac{2}{1-x}+\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{2x^2}{(1-x)^3}$$

$$y'''=\frac{2}{(1-x)^2}+\frac{2(1-x)^2+2(1-x)2x}{(1-x)^4}+\frac{2(1-x)^2+2(1-x)2x}{(1-x)^4}+\frac{4x(1-x)^3+3(1-x)^2 2x^2}{(1-x)^6}=\cdots$$

$$\cdots=\frac{2}{(1-x)^2}+\frac{2}{(1-x)^2}+\frac{4x}{(1-x)^3}+\frac{2}{(1-x)^2}+\frac{4x}{(1-x)^3}+\frac{4x}{(1-x)^3}+\frac{6x^2}{(1-x)^4}$$

d) $y=\frac{2x^3+1}{x^4}$

$$y'=\frac{6x^2x^4-(4x^3)(2x^3+1)}{x^8}=\frac{6x^2}{x^4}-\frac{(4x^3)(2x^3+1)}{x^8}$$

$$y''=\frac{12x\,x^4-4x^3\,6x^2}{x^8}-\frac{\left((12x^2)(2x^3+1)+6x^2(4x^3)\right)x^8-8x^7\,4x^3\,(2x^3+1)}{x^{16}}=\cdots$$

$$\cdots=\frac{12}{x^3}-\frac{24}{x^3}-\frac{24}{x^3}+\frac{12}{x^6}-\frac{24}{x^3}+\frac{64}{x^3}+\frac{32}{x^6}=\frac{44}{x^6}+\frac{4}{x^3}$$

$$y'''=\frac{-6x^5(44)}{x^{12}}+\frac{-3x^2(4)}{x^6}=\frac{-264}{x^7}-\frac{12}{x^4}$$

10. Derivar

a) $y=3\cos x-4\sec x$ $\qquad 3\cos x-\frac{4}{\cos x}$

$$y'=-3\sin x-\frac{(-(-\sin x)4)}{\cos^2 x}=-3\sin x-\frac{4\sin x}{\cos x}\frac{1}{\cos x}=-3\sin x-4\tan x\sec x$$

b) $y=x^2\sec x$ $\qquad \frac{x^2}{\cos x}$

$$y'=\frac{2x\cos x-(-\sin x)x^2}{\cos^2 x}=\frac{2x\cos x}{\cos^2 x}+\frac{x^2(\sin x)}{\cos^2 x}=2x\sec x+x^2\tan x\sec x$$

c) $y=x^3\csc x$ $\qquad \frac{x^3}{\sin x}$

$$y'=\frac{3x^2\sin x-\cos x(x^3)}{\sin^2 x}=\frac{3x^2\sin x}{\sin^2 x}-\frac{x^3\cos x}{\sin^2 x}=3x^2\csc x-x^3\cot x\csc x$$

d) $y=\sin^2 x$ $\qquad (\sin x)^2$

$$y'=2\sin x(\cos x)$$

11. Hallar derivadas

a) y= $\sin x$

$y' = \cos x$

b) y= $\cos x$

$y' = -\sin x$

c) y= $\frac{\cos x}{1+\sin x}$

$y' = \frac{-\sin x \; 1+\sin x - \cos x(\cos x)}{1+\sin \; x^{2}} = \frac{-\sin x - \sin^{2} x - \cos^{2} x}{1+\sin \; x^{2}}$

d) y= $\tan^2 2\pi x$ $\tan 2\pi x^2$

$y' = 2\tan 2\pi x \frac{\cos 2\pi x \cos 2\pi x + \sin 2\pi x\,(\sin 2\pi x)}{\cos^{2} x} = 2\tan 2\pi x \; 1 + \tan^2 x = 4\pi \tan 2\pi x \sec^2 2\pi x$

e) y= $\sin^5 3t$ $\sin 3t^{\;5}$

$y' = 15 \sin 3t\,(\cos 3t)$

12. Hallar las derivadas indicadas

a) $\frac{d^4}{dx^4}(\sin x)$

$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x, \frac{d^2}{dx^2}(\sin x) = -\sin x, \frac{d^3}{dx^3}(\sin x) = -\cos x \rightarrow$

$\frac{d^4}{dx^4}(\sin x) = --\sin x = \sin x$

b) $\frac{d^4}{dx^4}(\cos x)$

$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin \mathrm{x}, \frac{d^2}{dx^2}(\cos x) = -\cos x, \frac{d^3}{dx^3}(\cos x) = --\sin x \rightarrow$

$\frac{d^4}{dx^4}(\cos x) = --\cos x = \cos x$

c) $\frac{d}{dt}\, t \;\; 2\, \frac{d^2}{dt^2}\; t\cos 3t$

Primero:

$\frac{d}{dt} t\cos 3t \;\; = \cos 3t - 3t \;\sin 3t \;\; , \;\; \frac{d^2}{dt^2} \; t\cos 3t \;\; = -3\sin 3t - 3\sin 3t - 9\mathrm{t}\cos 3t$

Luego:

$\frac{d}{dt} t^2(-6\sin 3t - 9\mathrm{t}\cos 3t = \cdots$

$\ldots = 2t \; -6 \sin 3t - 9\mathrm{t} \cos 3t \; + ((\; -18 \quad \cos 3t) \; - (\; 9 \; \cos 3t \quad - \quad 27t \quad \sin 3t \;) t^2 = \cdots$
$\ldots = -\; 12\mathrm{t} \sin 3t - 18t^2 \cos 3t - 18t^2 \cos 3t - 9t^2 \cos 3t + 27t^3 \sin 3t$
$\ldots = -\; 12\mathrm{t} \sin 3t - 45t^2 \cos 3t + 27t^3 \sin 3t$

d) $\frac{d}{dt} \quad t \frac{d}{dt} (\cos t^2)$

Primero:

$\frac{d}{dt} \cos t^2 = -2t \sin t^2$

Luego:

$\frac{d}{dt} t \; -2t \sin t^2 = -2t \sin t^2 + -2 \sin t^2 - 4t^2 \cos t^2 \; t = \cdots$
$\ldots = -4t \sin t^2 - 4t^3 \cos t^2$

e) $\frac{d}{dx} f \quad \sin 3x \quad = 3\mathrm{f} \cos 3\mathrm{x}$

f) $\frac{d}{dx} \sin \; f \;\; 3x \quad = 3f \cos(f \;\; 3x \;\;)$

Ejercicios 2.1

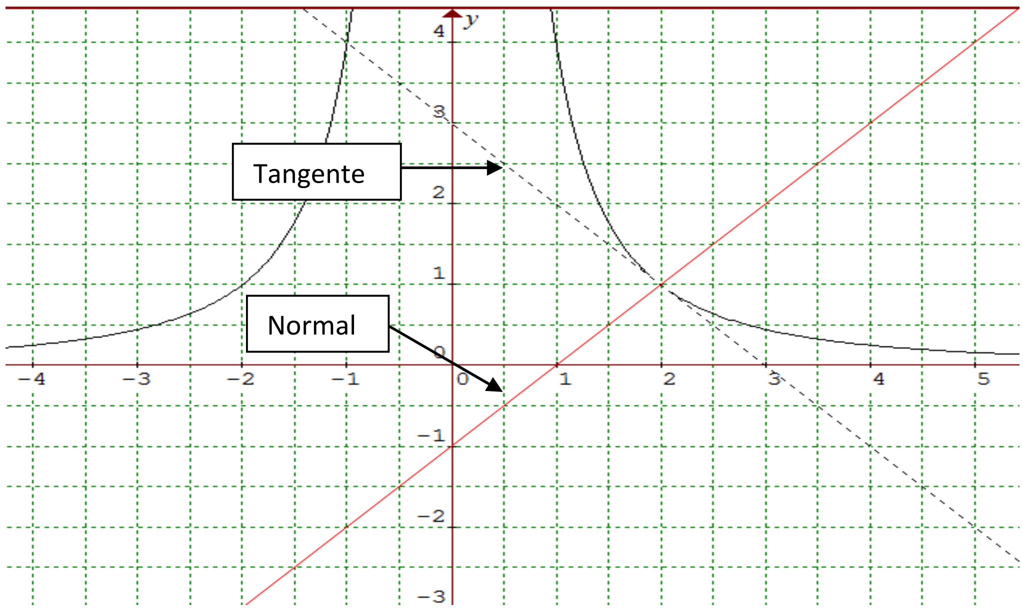
Obtener las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la grafica de la ecuación en el punto indicado. Trazar en la graficadora la grafica junto con las rectas tangente y normal en el mismo rectángulo de inspección.

15. $y = \frac{4}{x^2}$; $(2,1)$

$f'(x) = \frac{-8x}{x^4}$ $\qquad f' \; 2 = -1$

Tangente
$(x-x_0)(m) = (y-y_o)$
→ (x-2)(-1) = (y-1)
→ -x+2= y-1
→ y=-x+3

Normal
$(x-x_0)(1/-m) = (y-y_o)$
→ (x-2)(1) = (y-1)
→ x-2= y-1
→ y=x-1



49. Demuestre que no existe una recta que pasa por el punto (1,5) que sea tangente a la cuerva $y = 4x^2$

Basta con evaluar la función en 1 para notar que nos manda al punto en el eje Y=4 y no al punto Y=5 como indica el ejercicio.

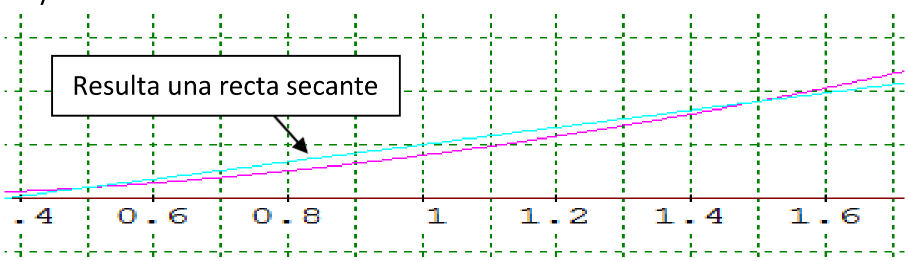
Tangente

(x-1)(8) = (y-5)

→ (8x-8) = (y-5)

→ 8x-8 = y-5

→ y=8x-3



Ejercicios 2.2

La función ‘f’ tiene como dominio el conjunto de todos los números reales y cuya grafica se muestras en la figura adjunta. Suponga que cada porción de la grafica que parece ser un segmento de la recta es un segmento de recta. En cada ejercicios haga lo siguiente:

25.

a) Defina ‘f’ como una función a trozos

b) Encuentre $f'_-(-1)$

c) Encuentre $f'_+(-1)$

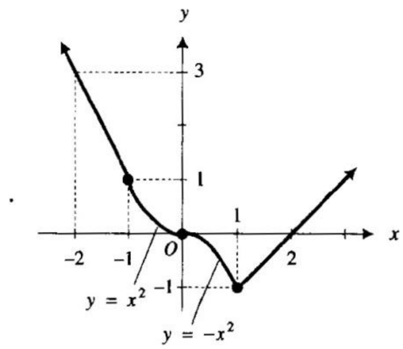
d) Encuentre $f'_-(0)$

e) Encuentre $f'_+(0)$

f) Encuentre $f'_-(1)$

g) Encuentre $f'_+(1)$

h) En que números ‘f’ no es diferenciable?



a)

$$f(x)=\begin{cases} -2x-1 & \boldsymbol{x<-1} \\ x^2 & \boldsymbol{-1\le x\le 0} \\ -x & \boldsymbol{0<x\le 1} \\ x-2 & \boldsymbol{1}<x \end{cases}$$

b)

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{f\,x-f(-1)}{x+1} = \frac{-2x-1-1}{x+1} = \frac{-2(x+1)}{x+1} = -2$$

c)

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{f\,x-f(-1)}{x+1} = \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{x+1\,(x-1)}{x+1} = x-1=-2$$

d)

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f\,x-f(0)}{x-0} = \frac{x^2-0}{x} = \frac{x^2}{x} = x = 0$$

e)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f\,x - f(0)}{x-0} = \frac{-x^2-0}{x} = \frac{-x^2}{x} = -x = 0$$

f)

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f\,x - f(1)}{x-1} = \frac{-x^2+1}{x-1} = \frac{-(x^2-1)}{x-1} = \frac{-(x+1\,x-1)}{x-1} = -x-1 = -2$$

g)

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f\,x - f(1)}{x-1} = \frac{x-2+1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1$$

h) No es diferenciable en x=1, ya que los limites laterales no coinciden en ese punto.

Ejercicios 2.4

Obtenga la derivada por medio de los métodos de derivación

16. $f\,x = x^4 - 5 + x^{-2} + 41x^{-4}$

$$f'\,x = 4x^3 - \frac{2}{x^3} - \frac{164}{x^5}$$

50. Obtenga una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^4 - 6x$ que sea perpendicular a la recta $x - 2y + 6 = 0$. Apoye su respuesta trazando la curva y las dos rectas en el mismo rectángulo de inspección.

Sabemos que:

$y = \frac{x+6}{2}$ tiene pendiente de m=1/2

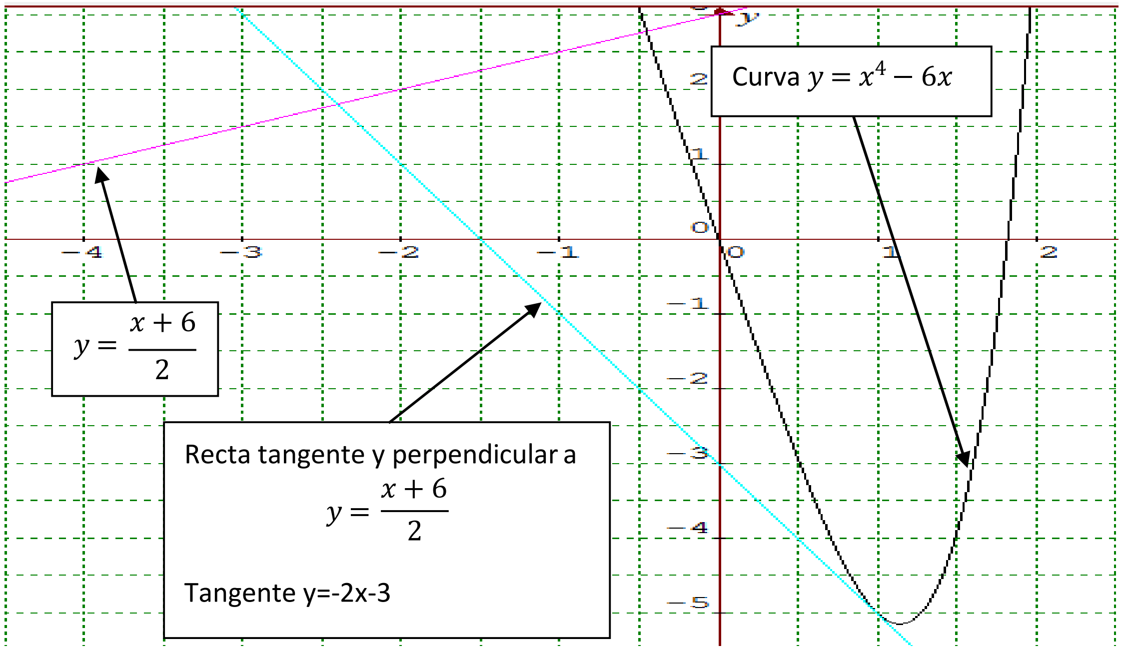
Entonces como buscamos la recta tangente perpendicular a $y = \frac{x+6}{2}$, la pendiente tiene que obtenerse por medio de $\frac{1}{-m}$, lo que nos devuelve una pendiente de m=-2, que vendría siendo la pendiente de la recta tangente. Como la pendiente se saca por medio de la derivada de la función, pues derivamos la función y la igualamos a la pendiente que obtuvimos:

$$y' = 4x^3 - 6 = -2$$

De donde nos resulta x=1, que es el punto donde pasa la recta tangente, ahora evaluamos la función de la cuerva en el punto x= 1, y nos devolverá y=-5.

Con estos dos datos ya podemos calcular la ecuación de la recta tangente perpendicular a $y = \frac{x+6}{2}$ como vemos a continuación por medio de formula y su respectiva grafica representativa.

Tangente
$(x-x_0)(m) = (y-y_o)$
→ (x-1)(-2) = (y+5)
→ -2x+2= y+5
→ y=-2x-3



Ejercicios 2.5

22. Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba desde el piso con una velocidad inicial de 32 pies/s. (1 pie = 0.3048m)(32 pies/s = 9.728 m/s)

a) Emplee la función $s = -16t^2 + v_0 t + s_0$ para describir la ecuación del movimiento de la pelota.

b) Estime que tan alto llegara la pelota y cuanto tiempo le tomara llegar hasta su punto mas alto.

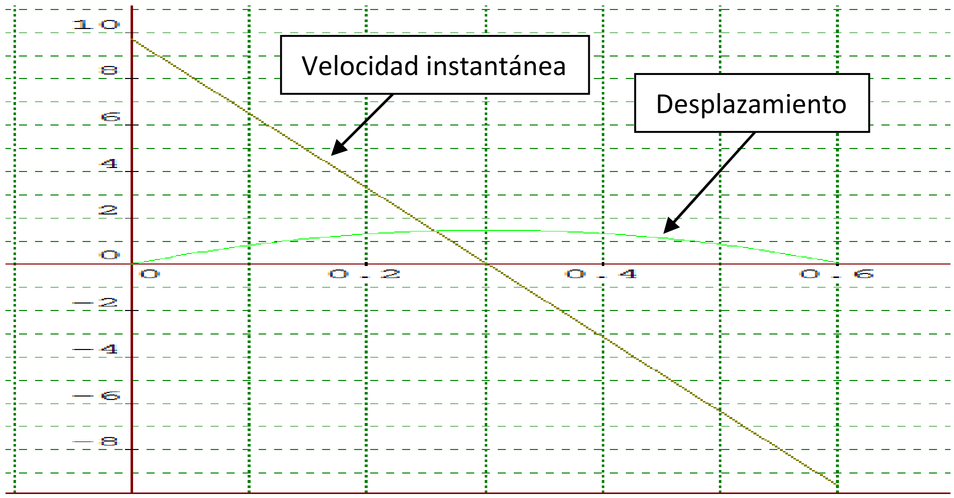
c) Trace en el mismo rectángulo de inspección de trayectoria de la pelota, la grafica de la ecuación de movimiento y la grafica de la ecuación que expresa la velocidad instantánea v como una función de t.

a) y c)La ecuacion de movimiento viene dada por:

$$s = (-16\, m/s^2)t^2 + 9.728\,\frac{m}{s}t$$

$$v = \frac{d}{dt}(-16\, m/s^2)t^2 + 9.728\,\frac{m}{s}t = -32\,\frac{m}{s^2}\,t + 9.728\, m/s$$

Simulacion del movimiento en la grafica:



b)En que tiempo llega a su punto mas alto lo sabemos por medio de la siguiente ecuacion:

$$0 = -32\frac{m}{s^2}t + 9.728\frac{m}{s} \to t = \frac{-9.728\frac{m}{s}}{-32\frac{m}{s^2}} = 0.304\ s \approx\ 0.3s$$

Sabiendo el tiempo ahora podemos calcular que tan alto llega la pelota de la siguiente manera:

$$s = -16\frac{m}{s^2}(0.304s)^2 + 9.728\frac{m}{s}0.304s = 1.478656\ m \approx 1.5\ m$$

Ejercicios 2.6

20. El ingreso total recibido por la venta de x escritorios es R(x) dolares, donde $R(x) = 200x - \frac{1}{3}x^2$. Determine:

a) La funcion de ingreso marginal

b) El ingreso marginal cuando x=30

c) El ingreso real por la venta del escritoro 31

a) La funcion de ingreso marginal es la derivada de $R(x) = 200x - \frac{1}{3}x^2$

$$\frac{d}{dx}\left(200x - \frac{1}{3}x^2\right) = 200 - \frac{6x}{9}$$

b) El ingreso marginal cuando x=30 es:

$$R'(30) = 200 - \frac{6(30)}{9} = 180\ dolares$$

c) El ingreso real por la venta del escritorio 31 es:

$R(31) = 200(31) - \frac{1}{3}(31)^2 = 5879.7\ dolares$

Ejercicios 2.7

Obtenga la derivada

21. $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}\right) = \frac{\cos x(1-\cos x) - \sin x(\sin x)}{(1-\cos x)^2} = \frac{\cos x - \cos^2 x - \sin^2 x}{(1-\cos x)^2}$

56. Una particula se mueve a lo largo de una recta de acuerdo a la ecuacion, donde s centimetros es la distancia dirigida de la particula desde el origen a los t segundos.

a) Cuales son la velocidad instantanea y la aceleracion instantanea de la particula a los t_1 segundos?

b) Determine la velocidad instantanea y la aceleracion instantanea a los t_1 segundos para cada valor de t_1.

$$s = 6\cos t\,;\ t_1\quad es\ igual\ a\ 0, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi\ y\ \pi$$

a)

$v = s' = -6\sin t$

$a = s'' = -6\cos t$

b) $v(t_1) = -6\sin t_1$

$v(0) = -6\sin 0 = 0\ m/s$

$v(\frac{1}{6}\pi) = -6\sin\frac{1}{6}\pi = -0.054\ m/s$

$v(\frac{1}{2}\pi) = -6\sin\frac{1}{2}\pi = -0.164\ m/s$

$v(\frac{5}{6}\pi) = -6\sin\frac{5}{6}\pi = -0.27\ m/s$

$v(\pi) = -6\sin\pi = -0.33\ m/s$

$a(t_1) = -6\cos t_1$

$a(0) = -6\cos 0 = -6 m/s$

$a(\frac{1}{6}\pi) = -6\cos\frac{1}{6}\pi = -1\ m/s$

$a\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -6\cos\frac{1}{2}\pi = -3\ m/s$

$a\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -6\cos\frac{5}{6}\pi = -1\ m/s$

$a(\pi) = -6\cos\pi = -6\ m/s$

Ejercicios 2.9

Obtenga la derivada de la fucion

5. $f(x) = (5-3x)^{\frac{2}{3}}$

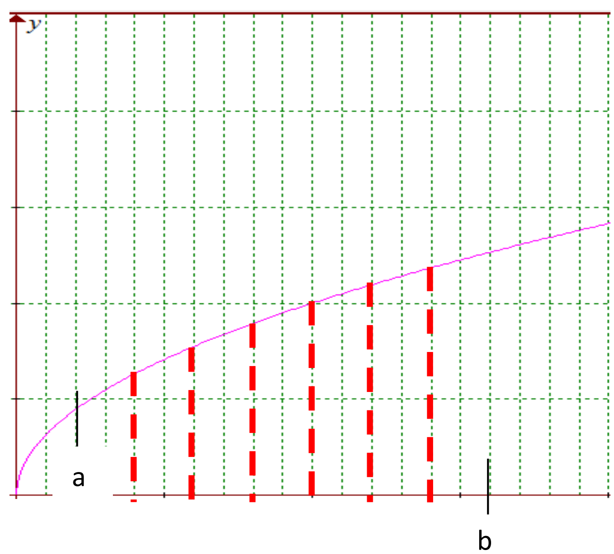
$f'(x) = \frac{-6}{3\sqrt[3]{(5-3x)}}$

TEMA II

CÁLCULO INTEGRAL

(Matemáticas Universitarias II)

INTEGRAL **BLOQUE I**

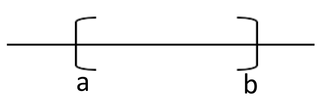


1.1 Cotas

α es cota superior de un conjunto P si y solo si $\propto \geq x, \forall x \nabla P$

β es cota inferior de un conjunto P si y solo si $\beta \leq x, \forall x \nabla P$

Un conjunto es acotado si es acotado superior y es acotado inferior.



"a" es cota inferior y "b" es cota superior, por la tanto el intervalo es acotado.

Se define a "M" como el máximo de un conjunto P.

Se define a "m" como el mínimo de un conjunto P.

El Máximo es la cota superior más pequeña

$$\propto \text{ es máximo de } P \leftrightarrow \forall \propto_0 \geq x, \forall x \nabla P \text{ cumple que } \propto \leq \propto_0$$

El mínimo es la cota inferior más grande

$$\propto \text{ es el mínimo de } P \leftrightarrow \forall x_0 \,|\, x_0 \leq x, \forall x \in P \text{ un } \ldots \text{ tal que } \propto \geq x_0$$

1.2 Partición.

La partición P de un intervalo es la división de ese segmento en "n" partes.

$$\Delta x = \boldsymbol{a} = \boldsymbol{x_0} < \boldsymbol{x_1} < \cdots < \boldsymbol{x_n} = b \qquad \text{ó} \qquad \Delta x = x_1 - x_0$$

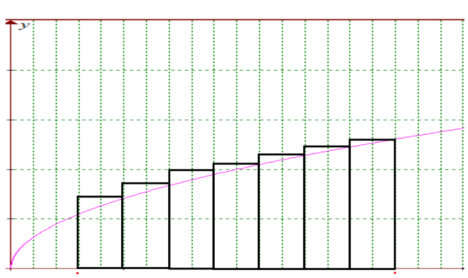
Designemos los valores máximos y mínimos de la función "f" en cada segmento

$$x_0 x_1 \; m_1 y M_1$$
$$x_1 x_2 \; m_2 y M_2$$

1.3 Suma Superior y Suma Inferior.

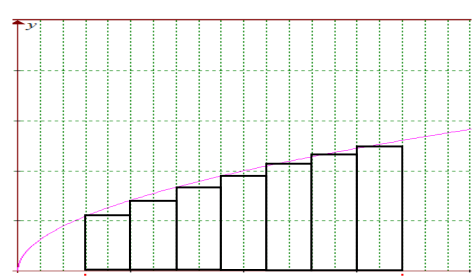
$$S_p = M_1\Delta x_1 + \cdots + M_n\Delta x_n \text{ Máximo de cada } \Delta x_i$$
$$s_p = m_1\Delta x_1 + \cdots + m_n\Delta x_n \text{ Mínimo de cada } \Delta x_i$$

SUMA SUPERIOR



a b

SUMA INFERIOR



a b

$$f\;x\;\geq 0$$
$$S\,p \leq S\,p$$

Demostración

Pasos:

$a < b \rightarrow ac < bc$

$a < b \rightarrow a + c < a \;\; + c$

$$\Delta x_i = \;\Delta x_i$$
$$m_i \leq M_i$$

[illegible]

$$m_i \leq x_i \,\forall x \,\nabla\, P \;y\; M_i \leq x_i \,\forall x \,\nabla\, P$$
$$\to\; m_i \leq \; x_i \leq M_i$$
$$\to \sum_{n} m_i \,\Delta x_i \leq \sum_{n} M_i \,\Delta x_i$$
$$\to \sum_{i=1} m_i \,\Delta x_i \leq \sum_{i=1} M_i \,\Delta x_i$$

Si la función es una constante, el máximo y mínimo son iguales

$$f\ x = c \to m_i = M_i$$

Si $f\ \ x\ \ = x$ la integral es el área del triangulo formado por la función.

1.4 Proposición.

En toda P partición se cumple que:

$Sn \geq m(b-a)$ donde

"m" es el valor mínimo de f(X) en el segmento [a,b].

Demostración

$$m \leq m_1 \leq \cdots \leq m_n$$
$$Si\ S\ p \geq m\ b-a$$
$$\to\; m_1\Delta x_1 + \;\cdots\; m_n\,\Delta x_n \geq \; m\Delta x_1 + \;\cdots\; + \; m\Delta x_n$$
$$Donde\, m\Delta x_1 + \cdots + m\Delta x_n = m\Delta x_1 + \cdots + \Delta x_n = mb-a$$
$$\to m_1\Delta x_1 + \cdots\, m_n\,\Delta x_n \geq m\ b-a$$
$$\to S\ p\ f \geq m(b-a)$$

y

$$S\ p \leq M\ \ b-a$$
$$\to\; M_1\,\Delta x_1 + \;\cdots\; M_n\,\Delta x_n \leq \; M\Delta x_1 + \;\cdots\; + \; M\Delta x_n$$
$$Donde\, M\Delta x_1 + \cdots + M\Delta x_n = M\Delta x_1 + \cdots + \Delta x_n = Mb-a$$
$$\to M_1\,\Delta x_1 + \cdots\, M_n\,\Delta x_n \geq M\ b-a$$
$$\to S\ p\ f \geq M(b-a)$$

Si f(x)>=0 uniendo las dos desigualdades obtenidas tenemos que:

$$m\ \ b-a\ \ \leq S\ p\ \ f\ \ \leq S\ p\ \ f\ \ \leq M\ \ b-a$$

Ya que

$$m\ \ b-a\ \ \leq S\ p\ \ f\ \ \ y\ S\ p\ \ f\ \ \leq M\ \ b-a$$

se demostraron arriba y por la demostración anterior a esta se sabe que:

$$\underline{S}\,p\,f \leq \overline{S}\,p\,f$$

1.5 Integral definida.

Cada uno de los segmentos $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots[x_{n-1},x_n]$ elegimos al número designado por $\xi_1, \xi_2,\ldots \xi_n$ tal que $x_0 < \xi < x,\ldots.x_n < \xi_n < x_n$

En cada uno de esos puntos calculemos el valor de la función y formemos la suma de $f(\xi_1),\ldots f(\xi_n)$

$$Sp\,f = f\,\xi_1\,\Delta x_{1+\ldots} + f\,\xi_n\,\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f\,\xi_i\,\Delta x_i \qquad \max\Delta x_i \to 0$$

$$\to \sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} f\,\xi_i\,\Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i$$

$$\underline{S}\,p(f) \leq Sp \leq \overline{S}\,p$$

La suma Sp(f) depende del modo de dividir el segmento [a,b] en los segmentos $[x_{i-1},x_i]$ así como la elección de los puntos $\xi_1, \ldots \xi_i$ dentro de estos segmentos de los puntos.

Designemos por $\max[x_{i-1},x_i]$ la mayor longitud de los segmentos $[x_{i-1},x_i]$, examinemos diferentes divisores del segmento [a,b] en los segmentos $[x_{i-1},x_i]$ tal que:

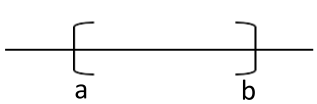
$$\max[x_{i-1},x_i] \to 0$$

1.6 Sumas de Riman.

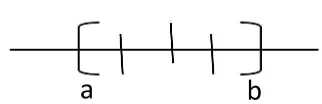
$$\lim_{max\to 0} \sum_{i=1}^{n} f\,\xi_i\,\Delta x_i = \int_a^b f\,x\,dx$$

1.7 Refinamiento.

Un refinamiento es una "P´" partición que contiene todos los elementos de una partición inicial(P)



Partición



Partición Refinada

Si "f" esta acotada en un intervalo I:,a ≤ x ≤ b- si P y P´ son dos particiones cualesquiera con P' refinamiento de P

$$\rightarrow S\,p´\,f \leq S\,p\,f \;\; y\, S\,p´(f) \geq S\,p(f)$$

"f" es acotada en $I \leftrightarrow \exists k\ \varepsilon\ R\ tal\ que\ \forall x\ \nabla\ I, f\ x \leq k$

$$inf S\,p\,f\ = \int_a^b f\ x\ dx$$

$$sup S\,p\,f\ = \int_a^b f\ x\ dx$$

$$sup S\,p\,f \leq inf S\,p\,f$$

Si $\int_a^b f x dx = \int_a^b f x dx$ existe la integral $\int_a^b f x dx$

1.8 Integral.

Si "f" es una función acotada en el intervalo I:, a ≤ x ≤ b- entonces es integrable si y solo si:

$$\int_a^b f\ x\ dx = \int_a^b f\ x\ dx = \int_a^b f\ x\ dx$$

Si "f" es acotada e un intervalo I y tanto P como P´ son dos particiones cualesquiera de I entonces cumple lo siguiente:

$$S\,p´\,f \leq S\,p\,f$$

$$\lim_{max\,\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m}\,\Delta x_i = \int_a^b f\ x\ dx$$

$$\lim_{max\,\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}\,\Delta x_i = \int_a^b f\ x\ dx$$

Ejercicio:

I:[0,1]

f(x)=x

P={0,1/4,...,1}

$\Delta x = (1/4 - 0)$

$$S\,p\,f = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M_i}\,\Delta x_i = \frac{1}{4}\,\frac{1}{4} + \frac{2}{4}\,\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{4} + 1\,\frac{1}{4} = \frac{10}{16}$$

$$S\,p\,f = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m_i}\,\Delta x_i = 0\,\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{4} + \frac{2}{4}\,\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{4} = \frac{6}{16}$$

P´={0,1/8,...,1}

$$S\,p'\,f = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M_i}\,\Delta x_i = \frac{36}{64}$$

$$S\,p'\,f = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m_i}\,\Delta x_i = \frac{28}{64}$$

$$S\,p\,f \leq S\,p'\,f \leq S\,p'\,f \leq S\,p\,f$$

EJEMPLOS:

1.f(x)=x^2 [0,1] con P,P´

P={0,1/8,...,1}

$$S\,p\,f = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M_i}\,\Delta x_i = \frac{268}{512}$$

$$S\,p\,f = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m_i}\,\Delta x_i = \frac{140}{512}$$

P´={0,1/16,...,1}

$$S\,p'\,f = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M_i}\,\Delta x_i = \frac{1419}{4096}$$

$$S\,p'\,f = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m_i}\,\Delta x_i = \frac{1240}{4096}$$

$$S\,p\,f \leq S\,p'\,f \leq S\,p'\,f \leq S\,p\,f$$

2.f(x)=$3x^2$+1

P={0,1/8,...,1}

$$S\,p\,f = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M_i}\,\Delta x_i = \frac{1124}{512}$$

$$S\,p\,f = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m_i}\,\Delta x_i = \frac{932}{512}$$

P´={0,1/16,…,1}

$$S\,p'\,f = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M_i}\,\Delta x_i = \frac{8581}{4096}$$

$$S\,p'\,f = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m_i}\,\Delta x_i = \frac{7560}{4096}$$

$$S\,p\,f \le S\,p'\,f \le S\,p'\,f \le S\,p\,f$$

3.f(x)=x^3

P={0,1/8,…,1}

$$S\,p\,f = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M_i}\,\Delta x_i = \frac{1296}{4096}$$

$$S\,p\,f = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m_i}\,\Delta x_i = \frac{784}{4096}$$

P´={0,1/16,…,1}

$$S\,p'\,f = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M_i}\,\Delta x_i = \frac{18496}{65536}$$

$$S\,p'\,f = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m_i}\,\Delta x_i = \frac{1240}{65536}$$

$$S\,p\,f \le S\,p'\,f \le S\,p'\,f \le S\,p\,f$$

Propiedad

Si f(x) es una función definida en el intervalo [a,b] se tiene que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Ejemplo:

$$\int_0^5 x^2\,dx = -\int_5^0 x^2\,dx$$

Propiedad

Para toda función "f" definida en el intervalo [a,b] se tiene que:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Ejercicio:

$$\int_0^a f(x)\,dx \quad donde\ f(x) = x$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{f}(\xi_i)\,\Delta x_i$$

P={0,a/n,2a/n,...na/n}

$$\sum_{i=1}^{n} k\frac{a}{n}\frac{a}{n} = \sum_{i=1}^{n} k\frac{a^2}{n^2} = \frac{a^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} k = \frac{a^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{a^2}{n^2}\frac{n^2+n}{2} = \frac{a^2}{2}\frac{n^2+n}{n^2} = \frac{a^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{a^2}{2}$$

EJEMPLOS:

1.Por inducción demostrar

a) $\frac{n((n+1)+1)}{2}$

$$\forall x \quad \nabla \quad \sum_{i=1}^{n} N\, i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$p(1) \quad \sum_{i=1}^{1} = = \frac{1(1+1)}{2} \qquad = 1 \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n+1} \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = 1+2+3+4+\cdots(n+1) = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+n)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \quad \therefore \sum_{i=1}^{n} \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

b) $\sum^{n} \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\forall x \nabla N \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$p(1) \quad \sum_{i=1}^{1} = = \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6} \qquad = 1 \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n+1} \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots(n+1)^2 = \sum_{i=1}^{n+1} i^2 + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+n) + 6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} \quad \therefore \sum_{i=1}^{n} \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

2.Hallar suma superior, suma inferior y la integral de la función f(x)=m en el intervalo [a, b]

P={(b-a)/n,2(b-a)/n,...(b-a)}

f(x)=m

$$S\,p = m + \frac{b-a}{n}\left(\frac{b-a}{n}\right) + \left(m + \frac{2(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n} + \cdots + \left(m \frac{n(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n}$$

$$S\,p = m\frac{(b-a)}{n} + \left(m + \frac{2(b-a)}{n}\right)\frac{(b-a)}{n} + \cdots + \left(m + \frac{(n-1)(b-a)}{n}\right)\frac{(b-a)}{n}$$

$$infSpf = m + \frac{b-a}{n} \quad \frac{b-a}{n}$$

$$supSpf = m + \frac{(n-1)(b-a)}{n} \quad \frac{(b-a)}{n}$$

como $supSpf \neq infSpf$ la [illegible]

3.Integrar f(x)=m en [a,b] por sumas de Riman

$$\int_a^b f\ x\ dx \quad donde\ f\ x = m$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\ \xi_i\ \Delta x_i$$

$$P_n = \frac{b-a}{n}, \frac{2\ b-a}{n}, \ldots, \frac{n\ b-a}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m\ k\ \frac{b-a}{n} \quad \frac{b-a}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{mk\ b-a^{\ 2}}{n^2} = \frac{m\ b-a^{\ 2}}{n^2} \quad \frac{n\ n+1}{2} = \frac{m\ b-a^{\ 2}}{2} \quad 1 + \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{m\ b-a^{\ 2}}{2} \quad 1 + \frac{1}{n} = \frac{m\ b-a^{\ 2}}{2}$$

4.Integrar f(x)=x en [5, 6] (Suma superior, suma superior refinada, suma inferior, suma inferior refinada)

P={0,1/8,2/8,...1}

$$S\ p\ f = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{M_i})\ \Delta x_i == \frac{356}{64}$$

$$S\ p\ f = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{m_i})\ \Delta x_i == \frac{348}{64}$$

P´={0,1/16,...,1}

$$S\ p'\ f = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{M_i})\ \Delta x_i = \frac{1416}{256}$$

$$S\ p'\ f = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{m_i})\ \Delta x_i = \frac{1400}{256}$$

$$S\ p\ f \leq S\ p'\ f \leq S\ p'\ f \leq S\ p\ f$$

1.9 Propiedades Fundamentales de la integral definida.

Propiedad del factor constante

Los factores constantes quedan fuera de la integral definida

$$\int_a^b cf\ x\ dx = c\int_a^b f\ x\ dx \quad donde\ c\ \nabla\ R$$

Propiedad 2

$$\int_a^b (f\ x + g(x))dx = \int_a^b f\ x\ dx + \int_a^b g\ x\ dx$$

Propiedad 3

Si el segmento [a, b] donde a<b y las funciones "f" y "g" satisfacen la condición:

$$f\ x \leq g\ x \rightarrow \int_a^b f\ x\ dx \leq \int_a^b g\ x\ dx$$

Sbexupdenlsnim intervalo

Sean m y M valores máximo y mínimo de la función "f" en el segmento [a, b] y a<=b

$$m\ b-a \leq \int_a^b f\ x\ dx \leq M\ b-a$$

Demostración

i) $m(b-a) \leq \int_a^b f\ x\ dx$

ii) $\int_a^b f\ x\ dx \leq M(b-a)$

iii) M y f funciones definidas en [a, b], $a \leq b, \forall x\ \nabla\ a, b$

$$m\ x \leq f\ x$$

$$\rightarrow m\ b-a \leq \int_a^b f\ x\ dx$$

M y f funciones definidas en [a, b], $a \leq b$, $\forall x\ \nabla\ a, b$

$$M\ x \geq f\ x$$

$$\rightarrow \int_a^b f\ x\ dx \leq M\ b-a$$

$$\rightarrow m\ b-a \leq \int_a^b f\ x\ dx \leq M\ b-a$$

Propiedad 4

Teorema de la media

Si la función es continua en [a, b] existe en este segmento un punto ξ tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi)$$

Propiedad 5

Para tres números arbitrarios a,b,c se verifica que siempre que exista:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Teorema fundamental del calculo

Si "f" es continua es [a, b], luego la función "g"

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{donde } a \le x \le b$$

Es continua en el intervalo cerrado [a, b] y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces

$$g'(x) = f(x)$$

Ejemplo:

Derivar la siguiente función:

1) $g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt$

$$g'(x) = \sqrt{1+x^2}$$

2) $\frac{d}{dx}\int_1^{x^4} \sec t\,dt = \frac{d}{dx}\int_1^{u} \sec t\,dt \quad \text{donde } u = x^4$

$$= \frac{d}{du}\int_1^u \sec t\,dt \;\frac{du}{dx} = \sec u\,\frac{du}{dx} = 4x^3 \sec x^4$$

Segundo teorema fundamental del calculo

Suponga que "f" es continua sobre el intervalo [a, b], si

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Donde F´=f

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{0}{4} = \frac{1}{4}$$

Ejemplo:

$$\int_{-2}^{5} 6dx = 6\int_{-2}^{5} dx = 6\,x\Big|_{-2}^{5} = 6\,(5-(-2)) = 42$$

$$\int_0^1 \left(1 + \frac{1}{2}u^4 - \frac{2}{5}u^9\right) du = \int_0^1 1du + \frac{1}{2}\int_0^1 u^4\,du - \frac{2}{5}\int_0^1 u^9 du$$

$$= x\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\frac{u^5}{5}\Big|_0^1 - \frac{2}{5}\frac{u^{10}}{10}\Big|_0^1 = 1 + \frac{1}{10} - \frac{2}{50}$$

EJEMPLOS:

1. Evaluar

a)

$$\int_0^1 x^{4/5}dx = \frac{x^{9/5}}{\frac{9}{5}}\Bigg|_0^1 = \frac{5x^{9/5}}{9}\Bigg|_0^1 = \frac{5}{9}$$

b)

$$\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}}dx = \int_1^9 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}\right) = \int_1^9 x^{\frac{1}{2}} - \int_1^9 x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^9 - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_1^9$$

$$= \frac{2\left(\sqrt{x^3}\right)}{3}\Bigg|_1^9 - 2\sqrt{x}\,\Big|_1^9$$

$$= \frac{54}{3} - 4 = \frac{40}{3}$$

c)

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{6}{\sqrt{1-t^2}}dt = 6\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$= 6\,\sin^{-1} t\,\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \pi$$

d)

$$\int_1^2 \frac{4+u^2}{u^3}\,du = \int_1^2 4u^{-3} + \int_1^2 u^{-1}\,du$$
$$= 4\left.\frac{u^{-2}}{-2}\right|_1^2 + \ln u\Big|_1^2$$
$$= \frac{3}{2} + (\ln 2 - \ln 1)$$

e)

$$\int_{-1}^{1} e^{u+1}\,du = e^{u+1}\Big|_{-1}^{1}$$
$$= e^2 - 1$$

f)

$$\int_0^1 10^x\,dx = \frac{10^x}{\ln 10}\Big|_0^1$$
$$= \frac{10}{\ln 10} - \frac{1}{\ln 10}$$

2. Encontrar la derivada

a)

$$\frac{d}{dx}\int_1^x \frac{1}{t^3+1}\,dt = \frac{1}{x^3+1}$$

b)

$$g(x) = \int_3^x e^{t^2-1}\,dt$$
$$g'(x) = e^{x^2-1}$$

c)

$$g(r) = \int_0^r \sqrt{x^2+4}\,dx$$
$$g'(x) = \sqrt{r^2+4}$$

d)

$$\frac{d}{dx}\int_x^1 \cos\sqrt{t}\,dt = -\cos\sqrt{x}$$

3.Si $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$ donde $f(t) = \int_1^{t^2} \frac{\sqrt{1+u^4}}{u}\,du$ alle $F''(2)$

$$F(x) = \int_1^x \int_1^{t^2} \frac{\sqrt{1+u^4}}{u}\,du$$

$$F'(x) = \int_1^x \frac{\sqrt{1+t^8}}{t}$$

$$F''(x) = \frac{\sqrt{1+x^8}}{x}$$

$$F''(2) = \frac{\sqrt{1+2^8}}{2} = \frac{\sqrt{257}}{2}$$

$$\rightarrow F''(x) = \frac{2s\sqrt{1+s^4}}{s^2} = \frac{2x\sqrt{1+(x^2)^4}}{x^2}$$

$$\rightarrow F''(x) = \frac{8\sqrt{1+256}}{4} = 2\sqrt{257}$$

Teorema

Si n es un numero racional:

$$\rightarrow \int x^4\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \; con \; n \neq -1$$

Ejemplo:

$$\int \sqrt{x}\left(x + \frac{1}{x}\right)dx = \int \sqrt{x}\,x\,dx + \int \sqrt{x}\,\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \int x^{\frac{3}{2}}\,dx + \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + 2\sqrt{x} + c$$

Teorema

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int sec^2 x\,dx = \tan x + c$$

$$\int csc^2 x\,dx = -\cot x + c$$

$$\sec x \tan x \, dx = \sec x + c$$

$$\csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$$

Ejemplo:

$$\frac{2 \cot x - 3 \sin^2 x}{\sin x} \, dx$$

$$= 2 \quad \cot x \csc x - 3 \quad \sin x$$

$$= -2 \csc x + 3 \cos x + c$$

y

$$3 \sec x \tan x - 5 \csc^2 x \, dx$$

$$= 3 \ \sec x \tan x \, dx - 5 \ \csc^2 x \, dx$$

$$= 3 \sec x + 5 \cot x + c$$

EJEMPLOS:

a)

$$\tan^2 x + \cot^2 x + 4 \, dx = \tan^2 x \, dx + \cot^2 x \, dx + 4 \, dx$$

$$= \quad \sec^2 x - 1 \, dx + \quad \csc^2 x - 1 \, dx + 4x$$

$$= \quad \sec^2 x \, dx - \quad dx + \quad \csc^2 x - \quad dx + 4x$$

$$= \tan x - \cot x + 2x + c$$

b)

1.-

$$\frac{y^4 + 2y^4 - 1}{\sqrt{y}} \, dy = \quad \frac{y^4}{y} dy + 2 \quad dy \frac{y^4}{y} \qquad \frac{1}{y} dy$$

$$= \frac{2 \sqrt{y^7}}{9} + \frac{4 \sqrt{y^9}}{9} - 2 \quad y + c$$

2.-

$$3 \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \, dx$$

$$= 3\ \ x^{\frac{1}{2}}\ dx + \ \ x^{-\frac{1}{3}} dx$$

$$= \frac{6\ \sqrt{x^3}}{3} + \frac{3\ \sqrt[3]{x^2}}{2} + c$$

3.-

$$\frac{3\tan\theta - 4\cos^2\theta}{\cos\theta}\, d\theta = 3\ \ \frac{\tan\theta}{\cos\theta}\, d\theta - 4\ \ \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta}\, d\theta$$

$$= 3\ \ \tan\theta\sec\theta\ d\theta - 4\ \ \cos\theta\ d\theta$$

$$= 3\sec\theta - 4\sin\theta + c$$

4.-f(x)=|x| y

F(x)= $\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & x \geq 0 \end{cases}$

Demostrar que F es anti derivada de f en (-∞,∞)

Sea F continua en el intervalo (-∞,∞), entonces F´ es continua en (-∞,∞)

F´(x)= $\begin{cases} -x^2 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$

Por definición f(x)=|x|

f(x)= $\begin{cases} -x^2 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$

$$\rightarrow f\ x = F'\ x = \ F(x)\ dx$$

Regla de la cadena

Sea g una función diferenciable y sea el contra dominio de g algún intervalo I. Suponga que f es una función definida en I y que F es una anti derivada de f.

$$\to \int f(g(x))\,[g'(x)\,dx] = F(g(x)) + c$$

Teorema

Si g es una función diferenciable y n es un numero racional

$$\to \int [g(x)]^n [g'(x)\,dx] = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + c \quad con\ n \neq -1$$

Ejemplo:

$$\int \sqrt{3x+4}\,dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{3x+4}\;3\,dx = \frac{2\sqrt{(3x+2)^3}}{9}$$

$$Donde\ f(u) = \sqrt{u}$$
$$Y\ g(x) = 3x+4 \to g'(x) = 3$$

EJEMPLOS:

Encontrar anti derivada

a)

$$\int \sqrt[3]{3x-4}\,dx = \frac{1}{3}\int \sqrt[3]{3x-4}\,dx = \frac{3\sqrt[3]{(3x-4)^4}}{4} + c$$

b)

$$\int \frac{t}{\sqrt{t+3}}\,dt = \int t * \frac{1}{\sqrt{t+3}}\,dt$$

$$Si\ u = t+3\ y\ t = u-3$$

$$\to \int \frac{u-3}{\sqrt{u}}\,du = \int \frac{u}{\sqrt{u}}\,du - 3\int du\,\frac{1}{\sqrt{u}}$$

$$= \int \sqrt{u}\,du - 3\int du\,\frac{1}{\sqrt{u}}$$

$$= \frac{2\sqrt{u^3}}{3} - 6\sqrt{u}\quad si\ u = t+3$$

$$\to \frac{2\sqrt{(t+3)^3}}{3} - 6\sqrt{t+3} + c$$

c)

$$\sin\frac{x}{3}\,dx = 3\sin\frac{x}{3}\,dx = -3\cos\frac{x}{3}$$

d)

$$x^{5}\sqrt[4]{x^{3}+3}\,dx$$

si tomamos a $u = x^{3} \rightarrow u' = 3x^{2}$ y $s = u + 3$

$$\rightarrow \frac{1}{3}u^{4}\sqrt{u+3}\,du = \frac{1}{3}\,(s-3)^{4}\sqrt{s}\,ds = \frac{1}{3}\,s^{\frac{5}{4}} - 3s^{\frac{1}{4}}\,ds$$

$$= \frac{1}{3}\,s^{\frac{5}{4}}ds - s^{\frac{1}{4}}ds$$

$$= \frac{4\sqrt[4]{s^{9}}}{27} - \frac{4\sqrt[4]{s^{5}}}{5}$$

Pero como $s = u + 3$ y $u = x^{3}$

$$\rightarrow \frac{4\sqrt[4]{s^{9}}}{9} - \frac{4\sqrt[4]{s^{5}}}{s} = \frac{4\sqrt[4]{(x^{3}+3)^{9}}}{27} - \frac{4\sqrt[4]{(x^{3}+3)^{5}}}{5}$$

Propiedades

$$u^{n}\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + c$$

$$a^{u}\ln a\,du = a^{u} + c$$

$$e^{u}\,du = e^{u} + c$$

$$\frac{du}{u} = \ln u + c$$

$$\frac{du}{\sqrt{a^{2}-u^{2}}} = \arcsin\frac{u}{a} + c$$

$$\frac{du}{a^{2}+u^{2}} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + c$$

$$\frac{du}{u\sqrt{u^{2}-a^{2}}} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arcsec}\frac{u}{a} + c$$

2.1 Integración por partes.

Si derivamos u*v

$$\rightarrow u * v\,' = u'v + uv'$$

$$\rightarrow u * v\,' = u'v + uv'$$

$$\rightarrow u * v = duV + u\,du$$

$$\rightarrow u\,dv = u * v - V\,du$$

Ejemplo:

$$xe^x dx$$

$$si\ u = x \rightarrow du = dx$$
$$dv = e^x \rightarrow v = e^x$$

$$\rightarrow xe^x\,dx = xe^x - e^x\,dx$$

$$= xe^x - e^x + c$$

y

$$\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx = x\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$Si\ u = x \rightarrow du = dx$$

$$dv = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \rightarrow v = \sqrt{1+x^2}$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+x^2}\,dx$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \frac{2\sqrt{1+x^2}^{\,3}}{3} + c$$

2.2 Integración de funciones por coeficiente indeterminado.

$$\frac{du}{u^2-a^2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{u^2-a^2}=\frac{A}{u-a}+\frac{B}{u+a}$$

$$\rightarrow A\ u+a\ +B\ u-a$$

$$\rightarrow\ Au\ +\ Aa\ +\ Bu\ -\ Ba$$

$$\rightarrow u\ A+B\ \ +a\ A-\ B$$

$$A+B=0\rightarrow A=\ -B$$

$$a\ A-B\ \ =1$$

$$\rightarrow a-b=\ \frac{1}{a}$$

$$A=\frac{1}{2a}\ \ y\ B=-\ \frac{1}{2a}$$

$$\rightarrow u\ \frac{\frac{1}{2a}}{u-a}+\frac{-\frac{1}{2a}}{u+a}=\frac{1}{2a}\ \frac{}{u-a}du-\frac{1}{2a}\ \frac{du}{u+a}$$

$$=\frac{1}{2a}\ln(u-a)-\ \frac{1}{2a}\ln(u+a)+c$$

Ejemplo:

$$\frac{3x+2}{x^2-9x+8}dx$$

$$\frac{1}{x^2-9x+8}=\frac{A}{x-8}+\frac{B}{x-1}$$

$$\rightarrow A\ \ x-1\ \ +B\ \ x-8$$

$$=Ax-A+Bx-8B$$

$$=x\ \ A+B\ \ -A-8B$$

$$A+B=3$$

$$-A-8B=2$$

$$-7B=5$$

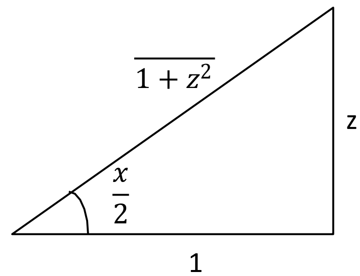
$$\rightarrow B=-\ \frac{5}{7}$$

$$luego\ A=\ \frac{21}{7}+\frac{5}{7}=\frac{26}{7}$$

$$\frac{3x+2}{x^2-9x+8}dx=\frac{\frac{26}{7}}{x-8}dx+\frac{-\frac{5}{7}}{x-1}$$

$$=\frac{26}{7}\ln(x-8)-\frac{5}{7}\ln(x-1)$$

2.3 Método de sustitución trigonométrica.



$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

$$\tan\frac{x}{2} = z;\quad \frac{x}{2} = \text{angtan } z$$

$$x = 2\,\text{angtan } z$$

$$dx = \frac{2dz}{1+z^2}$$

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$$

2.4 Teorema del valor medio para integrales.

Si la función "f" es continua en el intervalo [a,b] entonces existe un elemento que pertenece a [a,b]

$$\exists\alpha \nabla [a,b] \ tal\ que \int_a^b f(x)\,dx = f(\alpha)(b-a)$$

Ejemplo:

Encontrar "α" tal que la integral desde 1 hasta 3 de f(x)=f(x)(3-1), donde f(x)=x^2

$$La\ integral\ de\ f(x) = x^2 = \frac{x^3}{3}$$

$$\rightarrow \frac{26}{3} = f(\alpha)\,2$$

$$\rightarrow \frac{26}{6} = f(\alpha) = \alpha^2$$

$$\rightarrow \pm\sqrt{\frac{26}{6}} = \alpha\ (Debe\ pertenecer\ al\ intervalo)$$

$$\rightarrow \int_1^2 x^2\,dx = \frac{26}{3}$$

Definición

Si la función "f" es integrable en el intervalo [a,b] el valor medio de "f" e [a,b] es:

$$\frac{\int_1^3 f(x)\,dx}{b-a}$$

Ejemplo:

Encontrar el valor medio de:

$$\int_1^3 f(x)\,dx \quad donde \quad f(x) = x^2$$

$$\frac{\int_1^3 x^2\,dx}{2} = \frac{\frac{26}{3}}{2} = \frac{26}{6}$$

2.5 Integrales impropias.

Si "f" es continua para toda x>a

$$\forall x > a$$

$$\rightarrow \int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Definición

Si "f" es continua:

$$\forall x \leq b$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

Definición

Si f es continua para todos los valores X y C, C es cualquier número real, entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_c^b f(x)\,dx$$

Ejemplo:

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx$$

$$\to \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^b = -e^{-b} + e^{-0} = 1-e^{-b}$$

$$\to \lim_{b\to\infty} 1-e^{-b} = 1$$

$$\int_{-\infty}^{2}\frac{dx}{(4-x)^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^2 \frac{dx}{(4-x)^2}\,dx$$

$$\to \int_a^2 \frac{dx}{(4-x)^2}dx = -\frac{1}{4-x}\Big|_a^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4-a}$$

$$\to \lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4-a}\right) = -\frac{1}{2}$$

2.6 Teorema de la comparación.

Considere que f y g son funciones continuas con:

$$f(x) \geq g(x) \geq 0 \; para \; x \geq a$$

a) Si

$$\int_a^\infty f(x)dx \; es \; convergente \to \int_a^\infty g(x)dx \; es \; convergente$$

b) Si

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx \; es \; divergente \to \int_{-\infty}^b g(x)dx \; es \; divergente$$

Ejemplo:

$$\int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{x}dx = \int_1^\infty \frac{1}{x}dx + \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}dx$$

$$como \int_1^\infty \frac{1}{x}dx \; diverge$$

$$Ahora \; \frac{1+e^{-x}}{x} > \frac{1}{x} \to 1+e^{-x} > 1 \to e^{-x} > 0$$

[illegible] $\int_1^\infty \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx$ [illegible]

Teorema

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$$

Converge si P>1

Diverge si P<=1

3.1 SUCESIONES.

Una sucesión es una función de f:N -> R

Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
&f\ n = 2n\ con\ n \nabla N \\
&Primeros\ 5\ elementos\ de\ la\ sucesion \\
&f\ \ 1\ \ = 2 \\
&f\ \ 2\ \ = 4 \\
&f\ \ 3\ \ = 6 \\
&f\ \ 4\ \ = 8 \\
&f\ \ 5\ \ = 10
\end{aligned}
$$

3.1.1 Limite de una sucesión.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} an = L \\
&\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ tal\ que\ n > N \to an - L < \varepsilon
\end{aligned}
$$

La siguiente sucesión converge

$$\frac{n}{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

Demostración

$$\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} = \frac{2n-2n-1}{2\ \ 2n\ +\ 1} = \frac{-1}{2\ \ 2n+1} < \varepsilon$$

$$
\begin{aligned}
&\to \frac{1}{\varepsilon} < 2\ \ 2n+1 \\
&\to \frac{1}{2\varepsilon} < 2n+1 \\
&\to \frac{1}{\varepsilon} - 1 < 2n \\
&\to \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{\varepsilon} - 1\ \ < n
\end{aligned}
$$

Teorema

Si una sucesión $\{a_n\}$ cuando tiene un límite se dice que es convergente (y debe ser único) y $\{a_n\}$ converge a ese límite.

Si la sucesión no converge decimos que la sucesión diverge.

Ejemplo:

$$\frac{4n^2}{2n^2+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{2n^2+1} = 2 \text{ Converge}$$

Demostración

$$\frac{4n^2}{2n^2+1} - 2 = \frac{4n^2 - 4n^2 - 2}{2n^2+1} = \frac{-2}{2n^2+1} = \frac{2}{2n^2+1} < \varepsilon$$

$$\to \frac{2}{\varepsilon} < 2n^2+1$$

$$\to \frac{2}{\varepsilon} - 2 < 2n^2$$

$$\to \frac{\frac{2}{\varepsilon} - 2}{2} < n^2$$

$$\to \sqrt{\frac{\frac{2}{\varepsilon} - 2}{2}} < n$$

3.1.2 Sucesiones monótonas y acotadas.

Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que:

i) Es creciente si $a_n \le a_{n+1}$ para toda n

ii) Es decreciente si $a_n \ge a_{n+1}$ para toda n

Una sucesión es monótona cuando es creciente o decreciente.

Ejemplo:

$$\frac{n}{2n+1}$$

$$\frac{n}{2n+1} \le \frac{n+1}{2n+3}$$

$$\to 2n^2 + 3n \le 2n^2 + 3n + 1$$

$$\to 0 \le 1$$

Es creciente

$a_{n+1} \ge a_n$ *Por lo tanto es creciente*

$a_{n+1} \le a_n$ *Por lo tanto es decreciente*

3.2 SERIES.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión, una serie es la suma de los elementos de esa sucesión.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \cdots + a_n \text{ (serie)}$$

Si tenemos la siguiente sucesión: $\{a_n\}$

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Encontrar la notación de la serie y las sumas dadas:

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$$
$$S_4 = \frac{15}{8}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$$

Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

Sea la $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie infinita y sea $\{S_n\}$ una sucesión de sumas parciales:

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n$$

Existe y es igual a "S", decimos que la serie es convergente y la suma de la serie es "S", cuando no existe el limite entonces decimos que diverge.

Teorema

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Sea $\{S_n\}$ una sucesión de sumas parciales para una serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$

$$\rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; tal \; que \; S_r - S_T < \varepsilon \rightarrow R > N \wedge T > N$$

Teorema

La serie geométrica converge a la suma:

$$\frac{a}{1-r}$$

$$Si \; |r| < 1 \; y \; diverge \; si \; |r| \geq 1$$

La serie geométrica es de la forma:

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_0$$

Teorema

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son infinitas que solamente difieren en los m primeros terminos, es decir $a_k = b_m$ con $k \neq m$

$$\rightarrow Ambas \; convergen \; o \; ambas \; divergen$$

$$\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \ldots$$

$$\frac{1}{n+4} = 0 + 0 + 0 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \ldots$$

Como vemos solo difieren de los primeros m términos.

Teorema

Si "c" es una constante diferente de cero:

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \; si \; converge \; y \; su \; suma \; es \; S \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c a_n \rightarrow converge \; y \; su \; suma \; es \; cS$$

$$ii) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow diverge \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c a_n \rightarrow diverge$$

Teorema

Si:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \; y \; \sum_{n=1}^{\infty} b_n \; convergen \; a \; S \; y \; R \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S \pm R$$

Teorema

Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge y si } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverge} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n \rightarrow diverge$$

Teorema

Una serie infinita en términos positivos es convergente si y solo si su sucesión de sumas parciales tiene una cota superior.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$Como \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \text{ es convergente, y es mayor que}$$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \ converge.$$

3.2.1 Teorema de la comparación.

Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos:

$$i) \text{ Si } \sum_{n=1}^{\infty} V_n \text{ es una serie de términos positivos convergente y } a_n \leq V_n \ \forall n \in Z^+$$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ converge$$

$$ii) \text{ Si } \sum_{n=1}^{\infty} W_n \text{ es una serie de términos positivos divergente y } a_n \geq W_n \ \forall n \in Z^+$$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ diverge$$

Teorema

Sean

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} V_n$$

series con términos positivos:

i) Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{V_n} = c > 0 \rightarrow \text{ambas convergen o ambas divergen}$$

ii) Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{V_n} = 0 \;y \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} V_n \;converge \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \;converge$$

Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n + 1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{3^n+1}}{\frac{4}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4\,3^n}{4(3^n + 1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{(3^n + 1)} = 1 > 0$$

$\therefore$ Converge

Teorema

Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

es una serie convergente en términos positivos sus términos se pueden agrupar y que la serie resultante también sea convergente y tendrá la misma suma que la serie dada.

Teorema

Si la sumatoria

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

es convergente en términos positivos, el orden de los términos se puede modificar y la serie resultante será convergente y tendrá la misma suma que la serie original.

3.2.2 Teorema (Prueba de la integral).

Si "f" es continua, decreciente y de valores positivos, x ≥ 1

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) + \cdots$$

Es convergente si:

i)

$$\int_1^{\infty} f(x)\ existe$$

ii) Si

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^{b} f(x)\,dx = \infty \rightarrow diverge$$

Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} xe^{-x}$$ [illegible]

$$\rightarrow \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} xe^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[-e^{-x}(x+1)\right]_1^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} -e^{-b}(b+1) - \left(-e^{-1}(1+1)\right)$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{b+1}{-e^{b}} + \lim_{b\to\infty} \frac{1+1}{e^{1}}$$

[illegible]

$$\rightarrow \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} xe^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{-e^{b}} + \lim_{b\to\infty} \frac{2}{e^{1}} = \frac{2}{e}\ \therefore Converge$$

Propiedad

Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

es absolutamente convergente entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

3.2.3 Prueba de la razón.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad , a_n \neq 0$$

i) Si

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1 \rightarrow es\ absolutamente\ convergente$$

ii) Si

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1 \quad o \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty \rightarrow diverge$$

iii) Si

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1\ No\ se\ puede\ decidir$$

3.2.4 Prueba de la raíz.

Sea

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \neq 0$$

i) Si

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1 \rightarrow es\ absolutamente\ convergente$$

ii) Si

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1 \rightarrow diverge$$

iii) Si

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \rightarrow no\ se\ puede\ utilizar\ este\ criterio$$

Ejemplo:

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}$$

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n \frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}\right|}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^{2n+1}}{n^{2n}}} \rightarrow \frac{3^{2+\frac{1}{n}}}{n^2}$$

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{3^{2+\frac{1}{n}}}{n^2} = 0 \therefore Es\ absolutamente\ convergente$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+1))^n}$$

$$\rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{(\ln(n+1))^n}\right|}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln(n+1))^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 \therefore Es\ absolutamente\ convergente$$

3.2.5 Series Alternantes.

Si

$$a_n > 0\ \forall n \nabla Z^+$$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \qquad se\ llama\ serie\ alternante$$

Teorema

Una serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

donde

$$a_n > 0\ y\ a_{n+1} < a_n \forall n \nabla Z^+\ y \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \rightarrow La\ serie\ converge$$

Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

i)

$$\frac{1}{n} > 0$$

ii)

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \rightarrow n < n+1 \text{ Por lo tanto decrece}$$

iii)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ Por lo tanto la serie } converge$$

3.2.6 Criterio de Convergencia.

Sea

$$a_n$$

una sucesión creciente, sea D una cota superior de esta sucesión

$$\rightarrow a_n \text{ converge y } \lim_{n\to\infty} a_n \leq D$$

Ejemplo:

$$\frac{2^n}{n!}$$

$$\rightarrow \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{n!\,2^{n+1}}{2^n\,(n+1)!} = \frac{2^{n+1}}{2^n\,(n+1)} = \frac{2}{n+1} \text{ Por lo tanto } decrece$$

$$\text{Luego } \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} \leq 0 \text{ Por lo tanto decrece y es acotada, converge}$$

EJERCICIOS DEL TEMA II: CÁLCULO INTEGRAL

1.

$$e^{x+e}dx = e^{x+e} + c$$

2.

$$\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}dx$$

$$Si\ u = \sin x + \cos x \rightarrow du = \cos x - \sin x$$

$$\rightarrow \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}dx = -\frac{1}{u}du$$

$$= -\ln u$$

$$= -\ln\ \sin x - \cos x$$

3.

$$x^3 \ln x\, dx$$

$$Si\ u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x}$$

$$Si\ dv = x^3 \rightarrow v = \frac{x^4}{4}$$

$$\rightarrow x^3 \ln x dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{1}{4}x^3 dx$$

$$= \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16}$$

4.

$$\frac{x}{x+2^{\ 2}}dx$$

$$\rightarrow \frac{x}{x+2^{\ 2}} = 1 - \frac{2}{x+2}$$

$$\rightarrow \frac{x}{x+2^{\ 2}}dx = 1dx - \frac{2}{x+2}dx$$

$$Si\ u = x + 2 \rightarrow du = dx$$

$$\rightarrow \frac{x}{x+2^{\ 2}}dx = 1dx - 2\frac{1}{u}dx = x - 2\ln x + 2$$

5.

$$\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}\,dx$$

$$Si\ u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x}$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}\,dx = \frac{\sqrt{1+u}}{u}\,du$$

$$Si\ s = \sqrt{1+u} \rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{1+u}}$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{1+u}}{u}\,du = 2\frac{s}{s^2-1}\,ds = 2\frac{s}{s+1\quad s-1}\,ds$$

$$\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s-1}$$

$$\rightarrow As - A + Bs + B = s$$

$$A + B = 1$$

$$-A + B = 0$$

$$2B = 1 \rightarrow B = \frac{1}{2}\ \ y\ \ A = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow 2\frac{s}{s+1\quad s-1}\,ds = 2\ \frac{\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s-1}\,ds = \ln s+1\ + \ln s-1$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}\,dx = \ln\ \sqrt{1+\ \ln x}+1\ + \ln\ \sqrt{1+\ \ln x}-1$$

6.

$$\tan^3 x \sec^4 x\,dx$$

$$Si\ u = \tan x \rightarrow du = \sec^2 x$$

$$Y\ \sec^2 x = \tan^2 x +\ x$$

$$\rightarrow\ \tan^3 x \sec^4 x\,dx = u^3\ u^2+1\ du = u^5+u^3\,du$$

$$\rightarrow\ \tan^3 x \sec^4 x\,dx = \frac{u^6}{6}+\frac{u^4}{4} = \frac{\tan x^{\ 6}}{6}+\frac{\tan x^{\ 4}}{4}$$

7.

$$\frac{x}{x^2+3x+2}\,dx = \frac{x}{x+2\quad x+1}\,dx$$

$$\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}$$

$$\rightarrow Ax + A + Bx + 2B = x$$

$$A + B = 1$$

$$A + 2B = 0$$

$$\rightarrow B = -1\ \ y\ \ A =\ 2$$

$$\rightarrow \int \frac{x}{x^2+3x+2}\,dx = \int \left(\frac{2}{x+2} + \frac{-1}{x+1}\right) dx$$

$$= 2\ln|x+2| - \ln|x+1|$$

8.

$$\int \frac{x^3+x+1}{x^4+2x^2+4x}\,dx$$

$$Si\ u = x^4+2x^2+4x \rightarrow du = 4(x^3+x+1)$$

$$\rightarrow \frac{1}{4}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{4}\ln u = \frac{1}{4}\ln(x^4+2x^2+4x)$$

9.

$$\int \cos 3x \cos 5x\, dx$$

$$Como\ \cos a \cos b = \frac{1}{2}\cos(a-b) + \frac{1}{2}\cos(a+b)$$

$$\rightarrow \int \cos 3x \cos 5x\, dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{2}\int \cos 8x\, dx$$

$$Si\ u = 2x \rightarrow du = 2$$

$$\rightarrow \int \cos 3x \cos 5x\, dx = \frac{1}{4}\int \cos u\, du + \frac{1}{2}\int \cos 8x\, dx$$

$$Si\ v = 8x \rightarrow dv = 8$$

$$\rightarrow \int \cos 3x \cos 5x\, dx = \frac{1}{4}\sin u + \frac{1}{16}\int \cos v\, dv$$

$$\rightarrow \int \cos 3x \cos 5x\, dx = \frac{1}{4}\sin u + \frac{1}{16}\sin u = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 8x$$

10.

$$\int \tan^2 4x\, dx$$

$$Si\ u = 4x \rightarrow du = 4$$

$$\rightarrow \int \tan^2 4x\, dx = \frac{1}{4}\int \tan^2 u\, du$$

$$\rightarrow \int \tan^2 4x\, dx = \frac{1}{4}(\tan u - u) = \frac{1}{4}(\tan 4x - 4x)$$

11.

$$\int \cos \vartheta\, d\theta = \sin \vartheta$$

12.

$$\int e^{\sqrt{x}}\, dx$$

$$Si\,u = \sqrt{x} \to du = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\to \int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\int e^{u}\,u\,du$$

$$Si\ r = u \to dr = du$$

$$Si\ ds = e^{u} \to s = e^{u}$$

$$\to \int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\left(e^{u}u - \int e^{u}\,du\right) = 2\left(e^{u}u - e^{u}\right)$$

$$\to \int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\left(e^{\sqrt{x}}\sqrt{x} - e^{\sqrt{x}}\right)$$

13.

$$\to \int \sin x \cos(\cos x)\,dx$$

$$Si\ u = \cos x \to du = -\sin x$$

$$\to \int \sin x \cos(\cos x)\,dx = -\int \cos u\,du = -\sin u = -\sin(\cos x)$$

14.

$$\int (x + \sin x)^2\,dx = \int \left(x^2 + 2x\sin x + \sin^2 x\right)dx$$

$$\to \int (x + \sin x)^2\,dx = \int x^2\,dx + \int 2x\sin x\,dx + \int \sin^2 x\,dx$$

$$COmo\ \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\to \int (x + \sin x)^2\,dx = \int x^2\,dx + \int 2x\sin x\,dx + \frac{1}{2}\int 1\,dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - 2x\cos x + \int \cos x\,dx + \frac{1}{2}\int 1\,dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - 2x\cos x + \sin x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin x$$

15.

$$\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 - \cos^2 x}\,dx = \int \frac{1 + (1 - \sin^2 x)}{1 - (1 - \sin^2 x)}\,dx = \int \frac{2 - \sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx$$

$$= \int \frac{2}{\sin^2 x}\,dx - \int 1\,dx = -2\cot x - x$$

16.

$$\int_0^2 x^3\sqrt{4 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{4 - u}\,u\,du \qquad u = x^2 \quad \to \quad \frac{du}{2} = x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 (s - 4)\left(\sqrt{s}\right)^2 \qquad s = 4 - u \quad \to \quad ds = -du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 s^{\frac{3}{2}} - 4\, s\, ds$$

$$= \frac{s^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{4s^{\frac{3}{2}}}{3}$$

$$= \frac{1}{5}\left(4-2^2\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}\left(4-2^2\right)^{\frac{3}{2}} = 16$$

17.

$$\int x\sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int (4-u)^{\frac{1}{2}}du \qquad u = x^2 \quad \rightarrow \quad \frac{du}{2} = x\,dx$$

$$= \frac{2\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{6} + c$$

18.

$$\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{u}{\sqrt{u+4}}\,dx \qquad u = x^2 \quad \rightarrow \quad \frac{du}{2} = x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 u(u+4)^{-\frac{1}{4}}dx \qquad s = u + 4 \quad \rightarrow \quad ds = du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 r - 4r^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2(x^2+4)^{\frac{5}{2}}}{6} - 2\sqrt{x^2+4} \quad = \frac{8}{3} - 2\sqrt{8} + c$$

19.

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{2\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{2^{\frac{3}{4}}}{3} - \frac{2}{3}$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4}\,dx \qquad = a^2\int \frac{sen^2 u\cos u}{a^4}\,du$$

$$x = a\sec u \qquad = \frac{1}{a^2}\int sen^2 u\cos u \qquad s = sen(u)$$

$$dx = a\tan u\sec u\,du \qquad = \frac{1}{a^2}\int s^2 ds \qquad ds = \cos(u)$$

$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2 sec^2 u - a^2} = \cdots$

$\ldots = a \tan u$

$u = sec^{-1}(\frac{x}{a})$

$= \frac{s^3}{3a^2}$

$= \frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2x^2}$

20.

$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16x^2-9}}$

$x = \frac{3\sec(u)}{4}$

$dx = \frac{3}{4}\tan u \ \sec u \ du$

$\sqrt{16x^2-9} = \sqrt{9sec^2 u - 9} = \cdots$

$\ldots = 3 \tan u$

$du = sec^{-1}(\frac{4x}{3})$

$= \frac{1}{4}\int \frac{16\cos(u)}{9} du$

$= \frac{4}{9}\int \cos u \ du$

$= \frac{4sen(u)}{9}$

$= \frac{\sqrt{16x^2-9}}{9x}$

21.

$\int \frac{x^2}{\sqrt{5-x^2}} dx$

$x = \sqrt{5} sen(u)$

$dx = \sqrt{5}\cos u \ du$

$\sqrt{5-x^2} = \sqrt{5-5sen^2(u)} = \cdots$

$\ldots = \sqrt{5}\cos(u)$

$u = sec^{-1}(\frac{x}{\sqrt{5}})$

$= 5\int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2u))\, du$

$= 5\int \frac{1}{2} du - \frac{5}{2}\int \cos(s) ds$

$= \frac{5u}{2} - \frac{5sen(2u)}{4}$

$= \frac{5}{2} sen^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}} - x\sqrt{5-x^2}$

22.

$$\frac{x}{(x^2+4)^{\frac{5}{2}}}dx \qquad = (x^2+4)^{-\frac{5}{2}}dx$$

$$= \frac{(x^2+4)^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} \qquad = -\frac{2}{3(x^2+4)^{\frac{3}{2}}} + c$$

23.

$$\frac{dx}{(4x^2-25)^{\frac{3}{2}}} \qquad = (4x^2-25)^{-\frac{3}{2}}dx$$

$$= \frac{(4x^2-25)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \qquad = -\frac{2}{(4x^2-25)^{\frac{1}{2}}} + c$$

24.

$$\frac{dx}{(x^2+4x+8)^{\frac{1}{2}}} \qquad = (x^2+4x+8)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$= \frac{(x^2+4x+8)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \qquad = 2(x^2+4x+8)^{\frac{1}{2}} + c$$

25.

$$\frac{dx}{(5-4x-x^2)^{\frac{5}{2}}} \qquad = (5-4x-x^2)^{-\frac{5}{2}}dx$$

$$= \frac{(5-4x-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} \qquad = \frac{2}{3(5-4x-x^2)^{\frac{3}{2}}} + c$$

26.

$$\overline{e^{2t}-9} \qquad = e^{2t}\,\overline{-9\,dt}$$

$$= \frac{(e^{2t}-9)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \qquad = \frac{2(e^{2t}-9)^{\frac{3}{2}}}{3} + c$$

27.-Evalúa cada una de estas integrales.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 3x\, dx \quad \rightarrow$ u=3x ^ du=3dx

$\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \mathrm{udu} \rightarrow \text{como la} \int \sin^2 \mathrm{udu} = \frac{1}{2}\mathrm{u} - \frac{1}{4}\mathrm{sen2u} + \mathrm{c}$

Entonces tenemos que u=3x

$\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}^2 \mathrm{udu} = \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}3\mathrm{x} - \frac{1}{4}\mathrm{sen2}\ \ 3\mathrm{x}\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}]$

Entonces como sen0=0 y sen3π=0

$= \frac{1}{3}\ (\frac{1}{2}(3\ \ \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{4}\mathrm{sen2}(3\ \frac{\pi}{2})) - (\frac{1}{2}3(0) - \frac{1}{4}\mathrm{sen2}(3)(0)]$

$= \frac{1}{3}\ (3\ \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{4}\mathrm{sen3\pi}] = \frac{1}{3}\ (3\ \frac{\pi}{4})] = \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$

28.- $\int \cos^2 x + \tan^3 x dx$

Entonces como $\cos^2 x = cosx^2$ $\quad$ $\tan^3 x = tanx^3$

u=cos x $\quad$ v= tan x

$\int \cos^2 x + \tan^3 x dx = \int \mathrm{u}^2 + v^3 du = \int \mathrm{u}^2 + \int v^3 du$

$= \frac{u^3}{3} + \frac{v^4}{4}$ →como u=cos x ^ v=tan x → $\frac{cosx^{\ 3}}{3} + \frac{tanx^{\ 4}}{4} + c$

29.- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$ tomamos a u=cos Y f (u)=u^2

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{u}^2\, x\, dx = \frac{u_2{}^3}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{cosx_2{}^3}{3}\Big|_0^{\pi} \quad \frac{\cos\ \frac{\pi}{3}{}^3}{3} - \frac{\cos\ \ 0^{\ \ 3}}{3} = \frac{\frac{1}{8}}{3} - \frac{1}{3}$

$= -\frac{7}{24}$

30.- $\int senx(x + \frac{\pi}{6}) \rightarrow u = \frac{\pi}{6} + x \qquad y\ f\ \ u\ \ = \ sinu \quad \rightarrow$

$\int senx(x + \frac{\pi}{6}) = \int sen(\ u) = -\cos u\ tisa \qquad u = \frac{\pi}{6} + x$

$$= -\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + c$$

31.- $\int \cos^2 x dx =$ Aplicamos propiedades trigonométricas $\cos^2 x = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$

$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2} dx$ Ahora aplicamos propiedades de las integrales.

$= \int (\frac{1}{2} dx + \frac{1}{2}\int \cos(2x) dx$ Tenemos que $u = 2x$ $f u = \cos u$ $\rightarrow$

$$\frac{1}{4}\int \cos u\, du + \int \frac{1}{2} dx = \frac{\sin(u)}{4} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x) + c$$

32.- $\int sen^3 x dx =$ Aplicamos formula de las integral

$.\int sen^n dx = -\frac{\cos sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{3}\int sen^{n-2} x dx + c$

Integramos $\int$senx dx= -cosx

$$\longrightarrow \int sen^3 x dx = -\frac{1}{3}\sin^2 x + \frac{2}{3}\int sen\, x\, xd = -\frac{1}{3}\sin^2 x - \frac{2}{3}\cos x + c$$

7.- $\int sin^3 x \cos^2 x\, dx =$ podemos simplificar la integral.

$\int sin^3 x \cos^2 x dx = \int sen^2 x (senx \cos^2 x)$ Usamos propiedades tigonometricas

$sen^2 X = 1 - \cos^2 x$

$\rightarrow \int senx cos^2 x (1 - \cos^2 x)$ = entonces tomamos como u=cosx y du=-senx

$= -\int u^2 (1 - u^2) du = -\int (u^2 - u^4) du = \int u^4 du - \int u^2 du$

entonces integramos

$$= \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + c \text{ sustituimos u= cosx}$$

$$= \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

33. $\int x \sin^3 x^2 \; dx =$

[illegible] $u=x^2$ y $du=2x$

$\rightarrow \int x \sin^3 x^2 \, dx = \frac{1}{2}\int sen^3 x$ → ahora podemos integrar aplicando la formula

$\rightarrow \frac{1}{2}\int sen^3 x = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(2 - sen^2 x\right)\cos x = -\frac{1}{6}\left(2 - sen^2 x\right)\cos x + c$

34.- $\int \cot^3 x \csc^4 x \, dx = \int \cot^3 x \; (\csc^2 x)^2 dx$ utilizamos propiedades de trigonometricas y tenemos que $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$ entonces

$\int \cot^3 x \; (csc^2 x)^2 dx = \int \cot^3 x(1 + \cot^2 x)$^2 =

$\rightarrow \int (\cot^7 x + 2\cot^5 x + \cot^3 x) dx = \int \cot^7 x \, dx + 2\int \cot^5 x \, dx + \int \cot^3 x \, dx$

Aplicamos formula donde a la integrales entonces:

$\rightarrow 2\int \cot^5 x = -\frac{1}{2}\cot^4 x + \cot^2 x + 2\log(senx) + c$

$\rightarrow \int \cot^3 x \, dx = -\frac{1}{2}\csc^2 x - \log(senx) + c$

$\rightarrow \int \cot^7 x \, dx = -\frac{1}{6}\csc^6 x + \frac{3\csc x^4}{4} - \frac{3\csc x^2}{2} \log senx + c$

→ Sumamos las antiderivadas

$\rightarrow \int \cot^3 x csc^4 x \, dx = \left(-\frac{1}{2}\cot^4 x + \cot^2 x + 2\log(senx)\right) + \left(-\frac{1}{2}\csc^2 x - \log(senx)\right) + \left(-\frac{1}{6}\csc^6 x + \frac{3\csc^4 x}{4} - \frac{3\csc^2 x}{2} - \log senx\right)$

$= -\frac{1}{6}\cot^6 x - \frac{\csc^4 x}{4} - \frac{3\csc^2 x}{2} + c$

35.- $\int sen^2 x cos^2 x dx$ por propiedades trigonométricas tenemos que $\cos^2 x = 1 - sen^2 x$

$\rightarrow \int sen^2 x \cos^2 x dx = \int sen^2 x (1 - sen^2 x) = \int sen^2 x - sen^4 x =$

$\int sen^2 x \, dx - \int sen^4 x \, dx$ → sustituimos a u=senx

$\rightarrow \int u^2 du - \int u^4 du = \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4}$ como u =senx

→la integral $\frac{sen^3 x}{3} - \frac{sen^4 x}{4} + c$

36.- $\int \sec^6 x\, dx =$ aplicamos formula que es:

$\int \sec^n u\, du = \frac{1}{n-1} \tan u \sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u\, du$

$\rightarrow \int \sec^6 x\, dx = \frac{1}{6-1} tan\ x\ \sec^{6-2}\ u + \frac{6-2}{6-1} \int \sec^{6-2} x dx$

$\rightarrow \int \sec^6\ x\ dx\ = \frac{1}{5}\ tan\, x \sec^4\ x + \frac{4}{5} \int \sec^4 x dx$

La integral de $\frac{4}{5} \int \sec^4 x dx = \frac{4}{5} (\frac{1}{3} tan\, x \sec^2 x + \int \sec^2 x dx)$

La integral de $\int \sec^2 x dx\ = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} sen 2x + c$

$\rightarrow \int \sec^6 x\, dx = \frac{1}{5} tan\, x \sec^4 + \frac{4}{5} (\frac{1}{3} tan x \sec^2 x + \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} sen 2x)$

$\rightarrow \int \sec^6 x\, dx = \frac{1}{5} tan\, x \sec^4 + \frac{4}{15} tan\ x \sec^2 x - \frac{4}{20} sen 2x + \frac{4}{10} x + c$

37.- $\int X\ (X^{\ 2} - 1)$^$99\ dx$

= $\int X\ (2X)$^$99\ \ dx$ = $\int\ \ (2X)$^$100\ \ dx$ = $2\ \int\ \ (X)$^$100\ dx$

= 2 [X^{101} / 101] + C

38.- $\int \frac{X^{\ 2}}{2+X^3}$dx = U=2+$X^3$ du= $3X^2$ dx

= $\frac{1}{3} \int \frac{du}{u}$ = $\frac{1}{3}$ [2 $u^{1/2}$]= $\frac{2}{3}$ $2 \overline{+ x^3 +}$ C

39.- $\int sen\, 4x\, dx$ u= 4x du= 4dx

= $\frac{1}{4} \int sen\, u du$ = $\frac{1}{4}$ [cos u] = $\frac{1}{4}$ cos 4x + c

40.- $\int \frac{dx}{2x+1\ ^2}$ u= 2x+ 1 du= 2dx

$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2}[-u^{-1}] = \frac{1}{2}\,2[\frac{-1}{u}] = \frac{-1}{2x+1} + C$

41.- $\int \frac{x+3}{x^2+6x^2}\,dx =$ u= $x^2 + 6x$ du= 2x + 6dx

$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2}[-u^{-1}] \quad \frac{1}{2} = [\frac{-1}{u}] = \frac{1}{2}[\frac{-1}{x^2+6x}] + C$

42.- $\int \sec a\theta \tan a\theta \; d\theta$ u= aθ du= adθ

= tan u du + c = tan a$\theta + c$

43.- $\int 2x+1\,(x^2+x+1)^3 dx$ u= x^2+x+1 du=2x+1dx

$= \frac{1}{2}\int u^3 du = \frac{1}{2}[\frac{u^4}{4}] = \frac{1}{2}[\frac{(x^2+x+1)^4}{4}] = \frac{(x^2+x+1)^4}{8} + c$

44.- $\int x^3(1-x^4)^5 dx$ u= 1- x^4 du= $4x^3$du

$= \frac{1}{4}\int u^5 du = \frac{1}{4}[\frac{u^6}{6}] = \frac{(1-x^4)^6}{6} + c$

45.- $\int \sqrt{x-1}\,dx =$ u= x -1 du= dx

$= \int \sqrt{u}\,du = \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{2(x-1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$

46.- $\int \sqrt[3]{1-x}\,dx =$ u= 1-x du= -dx

$= -\int \sqrt[3]{u}\,du = -\left[\frac{3u^{\frac{4}{3}}}{4}\right] = \frac{3(1-x)^{\frac{4}{3}}}{4} + c$

47.- $\int x\,(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\,dx$ u= x^2 +1 du= 2xdx

$= \frac{1}{2}\int u^{\frac{3}{2}}\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{2u^{\frac{5}{2}}}{5}\right] = \frac{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}{5} + c$

48.- $\int x^3\sqrt{2+x^4}\,dx =$ u= 2+x^4 du= 4x^3dx

$= \frac{1}{4}\int \sqrt{u}\,du = \frac{1}{4}\int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{4}\left[\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}\right] = \frac{(2+x^4)^{\frac{3}{2}}}{6}] + C$

49.- $\int \frac{2}{(t+1)^6}\,dt =$ u= t+1 du= du

$= 2\int \frac{du}{(u)^6} = 2\int u^{-6} = 2\left[\frac{u^{-5}}{-5}\right] = \frac{-2}{5u^5} + c$

50.- $\int \frac{1}{(1-3t)^4}\,dt =$ u= 1-3t du=-3dt

$= \frac{-1}{3}\int \frac{du}{u^4} = = \frac{-1}{3}\int u^{-4}\,du = \frac{-1}{3}\left[\frac{u^{-3}}{-3}\right] = \frac{-1}{3}\left[\frac{-1}{3u^3}\right] = \frac{1}{3(1-3t)^3} + c$

51.- $\int \sqrt[5]{3-5y}\,dy = \int (3-5y)^{\frac{1}{5}}\,dy = \frac{-1}{5}\int u^{\frac{1}{5}}\,du =$

$\frac{-1}{5}\left[\frac{u^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}}\right] = \frac{-u^{\frac{6}{5}}}{6} = -\frac{\sqrt[5]{(3-5y)^6}}{6} + c$

52.- $\int sec^2 3\theta\, d\theta =$ u= 3θ du= $3d\theta$

$\frac{1}{3}\int sec^2 u\, du =$ $\frac{1}{3}$[tan u]+ c = $\frac{\tan 3\theta}{3} + c$

53.- $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x}} dx = \int x^2 (1-x)^{\frac{-1}{2}} dx = \int (x^4 - x^5)^{\frac{-1}{2}} dx =$

$2\,(x^4 - x^5)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x^4 - x^5} = 2x^2\sqrt{1 - x} + c$

54.- $\int t^2 \cos(1 - t^3) dx =$ u= $1 + t^3$ du= $-2\, t^2$ dt

$= \frac{-1}{2} \int \cos u\, du = \frac{-sen\ u}{2} = \frac{-sen(1+t^3)}{2}$ + c

55.- $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ dx= u= $\sqrt{x}$ du= $\frac{1}{2\sqrt{x}} dx =$

$2\int \cos u\, du = 2$ sen u = 2 sen $\sqrt{x} + c$

56. - $\int \frac{ax + b}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}$dx= u= $ax^2 + 2bx + c$ du= 2ax+2b dx

$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = [\int u^{\frac{-1}{2}} du] = 2\, u^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{ax^2 + 2bx + c}$ +c

57.- $\int \cos(7-3X)\,dx=$ u=7-3x f(x)= cos u g(x)= 7-3x g'(x)= -3dx

$\int f\ g\ x\ (g'\ x = \frac{-1}{3}\int \cos 7-3x\ -3dx\ = \frac{-1}{3}$ [sen (7-3x)]

58.- $\int sen\,(2x+3)$dx= u= 2x+3 f(X)= sen u g(x)= 2x +3 g'(x)= 2dx

$\int f\ g\ x\ (g'\ x = \frac{1}{2}\int sen\ 2x+3\ (2dx) = \frac{1}{2}$[-cos(2x+3)]

59.- $\int \frac{x}{x^2+1}dx=$ u=x^2+1 du= 2xdx

$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\int u^{-1/2} = \frac{1}{2}[2u^{1/2}] = \sqrt{x^2+1}$

60.- $\int x\,e^{x^2}$dx= u=x^2 du/2=$\frac{2xdx}{2}$

$\frac{1}{2}\int e^u$du = $\frac{1}{2}$ [e^u]= $\frac{e^{x^2}}{2}$

61.- $\int_0^1 X^{4/5}\,dx=$ $\frac{x^{9/5}}{9/5}$ dx = [$\frac{5x^{9/5}}{9}$]= $\frac{5}{9}$

62.- $\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}}dx= \int x-1\ (x)^{-1/2}\,dx = \int_1^9 x^{1/2} - x^{-1/2}\ dx$=[$\frac{2x^{3/2}}{3}$ $]_1^9$

= [$\frac{54}{3}$ - $\frac{1}{3}$] – [6-2]= $\frac{53}{3}$ - 4 = $\frac{41}{3}$

63.- $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{6}{\sqrt{1-t^2}}\,dx = \frac{-1}{2}\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{6}{\sqrt{x}}du = \frac{-1}{2}\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} 6(u)^{-1/2}du=$

$-\frac{1}{2}$ (6) ($\frac{2\,u^{\frac{1}{2}}}{1}$) = -6 $\left[1-t^{2}\right]$ ^{3} a $\frac{}{2}$ ½) = -6 $1-\frac{3}{2}+6$ $1-\frac{1}{4}$

64.- $\int_{1}^{2}\frac{4+u^{3}}{u^{2}}du=\int_{1}^{2}4u^{3}+u^{1}du=\frac{4}{2}u^{2}+\ln|u|\Big|_{1}^{2}$

$$\frac{2}{u^{2}}+\ln u\Big|_{1}^{2}=\frac{1}{2}+\ln 2\;\; 2+\ln 1\;=\;\frac{3}{2}+\ln 2$$

65.- $\int_{-1}^{1}e^{u+1}du=e^{u+1}\Big|_{-1}^{1}=e^{2}-e^{0}=e^{2}-1$

66.- $\int_{0}^{1}10^{x}\,dx=\frac{10^{x}}{\ln 10}\Big|_{0}^{1}=\frac{10}{\ln 10}-\frac{1}{\ln 10}=\frac{9}{\ln 10}$

67.- $\int e^{x}(1+e^{x})^{10}dx=$ u= $1+e^{x}$ du= e^{x} dx

68.- $\int(\tan^{2}x+\cot^{2}x+4)\,dx=$

$$=\int\tan^{2}x\,dx+\int\cot^{2}x\,dx+4\int dx$$

$$=\tan x-x-\cot x-x+4x+C$$

$$=2x+\tan x-\cot x+C$$

69.- $\int\frac{4-2y}{y+2y}$

$$= \int \frac{y^4+2y^2-1}{(y)^{1/2}}\,dy = \int y^{7/2} + 2y^{3/2} - y^{-1/2}\,dy$$

$$= \frac{2}{9}(y^{9/2}) + \frac{4}{5}y^{5/2} - 2y^{1/2} + C$$

70.- $\int \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

$$= \int x^{1/3} + x^{-1/3}\,dx$$

$$= \frac{3}{4}x^{4/3} + \frac{3}{2}x^{2/3} + C$$

71.- $\int_0^1 (x^4+x)^5\,(4x^3+1)\,dx =$ u= x^4+x du= $4x^3 + 1$dx

$\int_0^1 u^5\,du = [\frac{u^6}{6}]$(evaluado de cero a uno) = [$\frac{(1^4+1)^6}{6}$] – [$\frac{(0^4+0)^6}{6}$]= $\frac{1}{6}$

72.- $\int_2^3 \frac{3x^2-1}{x^3-x}\,dx =$ u= $x^3 - x$ du= $3x^2$-1 dx

$\int_2^3 \frac{du}{u}$ = [In u](evaluado de 2 a 3) = In ($x^3 - x$) = (In 27 – In 3) - (In 8 – In 2)= (In 25 – In 5) = $In\ \frac{25}{5}$

73.

sen^6(x) dx

escribamosla como:
∫ (sen²x)³ dx =
apliquemos la fórmula para la reducción del exponente sen²θ = *1 - cos(2θ)+ /2:
∫ ,*1 - cos(2x)] /2}³ dx =
(desarrollando el cubo)
∫ ,*1 - 3cos(2x) + 3cos²(2x) - cos³(2x)] /8} dx =
además apliquemos la fórmula para la reducción del exponente cos²θ =

*1 + cos(2θ)+ /2:
∫ , ,1 - 3cos(2x) + 3{{1 + cos[2(2x)]} /2} - cos^3(2x)} /8} dx =
∫ , ,*2 - 6cos(2x) + 3 + 3cos(4x) - 2cos^3(2x)] /2} /8} dx =
∫ ,*5 - 6cos(2x) + 3cos(4x) - 2cos^3(2x)] /16} dx =
(distribuyendo y simplificando)
∫ *(5/16) - (6/16)cos(2x) + (3/16)cos(4x) - (2/16)cos^3(2x)] dx =
∫ *(5/16) - (3/8)cos(2x) + (3/16)cos(4x) - (1/8)cos^3(2x)] dx =
partamos la integral llevando fuera las constantes:
(5/16) ∫ dx - (3/8) ∫ cos(2x) dx + (3/16) ∫ cos(4x) dx - (1/8) ∫ cos^3(2x) dx =
(5/16)x - (3/8) (1/2)sen(2x) + (3/16) (1/4)sen(4x) - (1/8) ∫ cos^3(2x) dx =
(5/16)x - (3/16)sen(2x) + (3/64)sen(4x) - (1/8) ∫ cos^3(2x) dx (#)
escribamos la restante integral como:
∫ cos^2(2x) cos(2x) dx =
reemplacemos cos^2(2x) con 1 - sen^2(2x):
∫ *1 - sen^2(2x)] cos(2x) dx =
(desarrollando)
∫ *cos(2x) - sen^2(2x) cos(2x)] dx =
(partiendo en dos integrales)
∫ cos(2x) dx - ∫ sen^2(2x) cos(2x) dx =
(1/2)sen(2x) - ∫ sen^2(2x) cos(2x) dx =
dividamos y multipliquemos la restante integral por 2 para obtener 2cos(2x) dx que es la diferencial de sen(2x):
(1/2)sen(2x) - (1/2) ∫ sen^2(2x) 2cos(2x) dx =
(1/2)sen(2x) - (1/2) ∫ sen^2(2x) d*sen(2x)+ =
(1/2)sen(2x) - (1/2) [1/(2+1)] [sen(2x)]^(2+1) + C =
(1/2)sen(2x) - (1/2)(1/3)sen^3(2x) + C =
(1/2)sen(2x) - (1/6)sen^3(2x) + C
insertemos este resultado en la expresión anterior (#), obteniendo:
(5/16)x - (3/16)sen(2x) + (3/64)sen(4x) - (1/8) ∫ cos^3(2x) dx = (5/16)x - (3/16)sen(2x) + (3/64)sen(4x) - (1/8) [(1/2)sen(2x) - (1/6)sen^3(2x)] + C =
(5/16)x - (3/16)sen(2x) + (3/64)sen(4x) - (1/16)sen(2x) + (1/48)sen^3(2x) + C =
(5/16)x - (4/16)sen(2x) + (3/64)sen(4x) + (1/48)sen^3(2x) + C
luego concluyendo con:
∫ sen^6(x) dx = (5/16)x - (1/4)sen(2x) + (3/64)sen(4x) + (1/48)sen^3(2x) + C

74.

cot^5x(sen^3x)

Recordemos que ∫ udv = uv - ∫ vdu
Vamos a ver la integral de esta manera: ∫ sen^5 x * cos x * cos^2 x dx
Y tomaremos a dv = sen^5 x * cos x dx, y a u = cos^2 x

Así, v = (sen^6 x)/6, y du = -2cos x * sen x dx
Y así, sólo acomodamos la integral:
cos^2 x * (sen^6 x)/6 + ∫ (sen^6 x)/6 * 2cos x * senx dx
cos^2 x * (sen^6 x)/6 + 1/3 ∫ sen^6 x * cos x * senx dx
cos^2 x * (sen^6 x)/6 + 1/3 ∫ sen^7 x * cos x dx
Y resolvemos la última integral, que sale casi directa:
cos^2 x * (sen^6 x)/6 + 1/3 (sen^8 x)/8

75.

$$\int \cot^5(x)\sin^3(x)\,dx =$$

$$\frac{1}{24}\left(20\cos(2x)+\cos(4x)-45\right)\csc(x)$$

76.

$$\tan^2 x \sec x\, dx$$

recordemos la identidad $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$:
$\int \tan^2 x \sec x\, dx = \int (\sec^2 x - 1) \sec x\, dx$
desarrollemos y luego partamos la integral en el segundo miembro:
$\int \tan^2 x \sec x\, dx = \int (\sec x \sec^2 x - \sec x)\, dx$
$\int \tan^2 x \sec x\, dx = \int \sec x \sec^2 x\, dx - \int \sec x\, dx$
ahora integremos $\int \sec x \sec^2 x\, dx$ por partes, asumiendo:
$\sec^2 x\, dx = dv \rightarrow \tan x = v$
$\sec x = u \rightarrow \tan x \sec x\, dx = du$

obteniendo:
$\int u\, dv = v\, u - \int v\, du$
$\int \tan^2 x \sec x\, dx = {}^*\tan x \sec x - \int \tan x (\tan x \sec x)\, dx + - \int \sec x\, dx$
$\int \tan^2 x \sec x\, dx = \tan x \sec x - \int \tan^2 x \sec x\, dx - \int \sec x\, dx$

nota que obtenemos la misma integral en ambos miembros, luego recojamosla en el primer miembro y resolvamos:
$\int \tan^2 x \sec x\, dx + \int \tan^2 x \sec x\, dx = \tan x \sec x - \int \sec x\, dx$
$2 \int \tan^2 x \sec x\, dx = \tan x \sec x - \int \sec x\, dx$
$\int \tan^2 x \sec x\, dx = (1/2) (\tan x \sec x - \int \sec x\, dx) =$
$(1/2)\tan x \sec x - (1/2) \int \sec x\, dx =$
multipliquemos la restante integranda por (secx + tanx) /(tanx + secx) (= 1):
$(1/2)\tan x \sec x - (1/2) \int (\sec x + \tan x) \sec x\, dx /(\tan x + \sec x) =$
desarrollando, obtenemos en el numerador la derivada del denominador:
$(1/2)\tan x \sec x - (1/2) \int (\sec^2 x + \tan x \sec x)\, dx /(\tan x + \sec x) =$
$(1/2)\tan x \sec x - (1/2) \int d(\tan x + \sec x) /(\tan x + \sec x) =$
$(1/2)\tan x \sec x - (1/2) \ln |\tan x + \sec x| + C$
en conclusión:
$\int \tan^2 x \sec x\, dx = (1/2)\tan x \sec x - (1/2) \ln |\tan x + \sec x| + C$

∫ $\cot^3 x$ csc^4x dx =

77.

$$\cot^3 x \csc^4 x$$

escribamosla como:
∫ $\cot^3 x \csc^2 x \csc^2 x$ dx =
reemplacemos el primer $\csc^2 x$ con $\cot^2 x + 1$:

∫ $\cot^3 x (\cot^2 x + 1) \csc^2 x$ dx =
(desarrollando la primera parte)
∫ (cot^5x + $\cot^3 x$) $\csc^2 x$ dx =
subsituyamos:
cotx = t
(diferenciando ambos miembros)
d(cotx) = dt
- $\csc^2 x$ dx = dt
$\csc^2 x$ dx = - dt
obteniendo:
∫ (cot^5x + $\cot^3 x$) $\csc^2 x$ dx = ∫ (t^5 + t^3) (- dt) =
∫ (- t^5 - t^3) dt =
(partiendo)
- ∫ t^5 dt - ∫ t^3 dt =
- [1/(5+1)] t^(5+1) - [1/(3+1)] t^(3+1) + C =
- (1/6)t^6 - (1/4)t^4 + C
substituyamos de nuevo t = cotx, concluyendo con:
∫ $\cot^3 x$ csc^4x dx = - (1/6)cot^6x - (1/4)cot^4x + C

78.

$$\text{sen}(3x)\ \text{sen}(6x)\ dx$$

podemos aplicar la fórmula de producto a suma:
sinθ sinϕ = *cos(θ - ϕ) - cos(θ + ϕ)+ /2
obteniendo:

∫ ,*cos(3x - 6x) - cos(3x + 6x)] /2} dx =
∫ ,*cos(- 3x) - cos(9x)] /2} dx =
(siendo el coseno una función par, entonces cosθ = cos(- θ))
∫ ,*cos(3x) - cos(9x)] /2} dx =
partamos en dos integrales llevando fuera las constantes:
(1/2) ∫ cos(3x) dx - (1/2) ∫ cos(9x) dx =
(1/2) (1/3)sen(3x) - (1/2) (1/9)sen(9x) + C
luego concluyendo con:
∫ sen(3x) sen(6x) dx = (1/6)sen(3x) - (1/18)sen(9x) + C
79.

$$dx/1 - \text{senx}\ \ dx$$

∫((1+sen x)/(1-senx)(1+senx))dx =
∫((1+sen x)/(1-sen^2x))dx =
∫((1+sen x)/cos^2x))dx =
∫(sec^2x + sen x/ cos^2x))dx =
tan x + ∫ sen x/ cos^2x))dx =
tan x + ∫-du/u^2 =
tan x + 1/ u + C = tanx + sec x + C.
80.

$$\tan^{4x} dx$$

= ∫ $\tan^2(x)$ $\tan^2(x)$ dx
= ∫ * $\tan^2$ (x) (1-$\sec^2(x)$] dx
= ∫ * $\tan^2$ (x) - $\tan^2$ (x)$\sec^2(x)$] dx
= ∫ $\tan^2$ (x) dx - ∫ $\tan^2$ (x)$\sec^2(x)$ dx
nuevamente se presenta tan(x) a potencia par en la primera integral
= ∫ * 1 - $\sec^2(x)$] dx - ∫ $\tan^2$ (x) $\sec^2(x)$ dx
= ∫ dx - ∫ $\sec^2(x)$ dx - ∫ $\tan^2$ (x) $\sec^2(x)$ dx
Se obtiene:
x - tan (x) - (1/3) $\tan^3$ (x) + c

81.

$$\tan\text{^}3(x) * \sec\text{^}3(x)\ dx$$

∫tan^2(x)*sec^2(x)*(tanx*secx) dx=
∫(sec^2(x) - 1)*sec^2(x)*(tanx*secx) dx=
∫(sec^4(x) - sec^2(x))*(tanx*secx) dx=
∫(sec^4(x)*(tanx*secx) dx - ∫sec^2(x))*(tanx*secx) dx=
∫(sec^4(x)*d(secx) - ∫sec^2(x))d(secx) =
(1/5)sec^5(x) - (1/3)sec^3(x) + c
82.

$$\csc^{3} x\ \ dx$$

reescribir como un producto:
∫ $\csc^2$ x csc x dx =
ahora vamos a:
$\csc^2$ x dx = dv → - cot x = v
csc x = u → - cot x csc x dx = du
entonces, la integración por partes,
∫ $\csc^2$ x csc x dx = - cot x csc x - ∫ - cot x (- cot x csc x dx) =
- Cot x csc x - ∫ $\cot^2$ x csc x dx;
a continuación, volver a escribir como x ² Cuna ($\csc^2$ x - 1), se obtiene:
∫ $\csc^3$ x dx = ∫ $\csc^2$ x csc x dx = - cot x csc x - ∫ ($\csc^2$ x - 1) csc x dx →
Ahora ampliar la integral en el lado derecho como:

∫ ³ csc x dx = - cot x csc x - ∫ (csc x ³ - csc x) dx →
y luego se dividen en:
∫ csc ³ x dx = - cot x csc x - ∫ ³ csc x dx + ∫ csc x dx →
por lo tanto, habiendo obtenido la misma integral desconectado
ambas partes, se reúnen en el lado izquierdo como:
∫ csc ³ x dx + ∫ ³ csc x dx = - cot x csc csc x + ∫ x dx →
2 ∫ csc ³ x dx = - cot x csc csc x + ∫ x dx →
∫ ³ csc x dx = - (1/2) cot x csc x + (1/2) ∫ csc x dx →
En cuanto a la integral restante,
multiplicar y dividir por (csc x - cot x):
∫ csc ³ x dx = - (1/2) cot x csc x + (1/2) ∫ {[csc x (csc x - cot x)] / (csc x - cot x) dx} →
∫ csc³ x dx = - (1/2) cot x csc x + (1/2) ∫ [(csc ² x - csc x cot x) / (csc x - cot x)] dx =
Ahora, habiendo conseguido en el numerador la derivada del denominador,
∫ csc³ x dx = - (1/2) cot x csc x + (1/2) ∫ [d (- cot x + csc x)] / (- x + cot csc x) =
∫ csc³ x dx = - (1/2) cot x csc x + (1/2) ln | csc x - cot x | + c
83.

$$\int sen^5 x\, dx$$

$$\int \sin^5(x)\, dx = -\frac{5\cos(x)}{8} + \frac{5}{48}\cos(3x) - \frac{1}{80}\cos(5x) + \text{constant}$$

84.

$$\int sen^4 x \cos^4 x\, dx$$

$$\int \cos^4(x)\sin^4(x)\, dx = \frac{24x - 8\sin(4x) + \sin(8x)}{1024} + \text{constant}$$

$$5. \int_2^4 \frac{dt}{\sqrt{16-t^2}} = \lim_{t\to 4}\int_2^t \frac{dt}{\sqrt{16-t^2}}$$

$$= \lim_{t\to 4} \sin^{-1}\frac{t}{4}\Big|_2^4 = \lim_{t\to 4}\left(\sin^{-1}\frac{4}{4} - \sin^{-1}\frac{2}{4}\right) = \lim_{t\to 4}\left(\sin^{-1} 1 - \sin^{-1}\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \blacksquare$$

Esta función converge

10. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan d\theta = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \int_0^t \tan d\theta = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \ln \sec\theta \Big|_0^{t} = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \left(\ln \sec t - \ln(sec 0)\right)$$
$$= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \ln \sec\frac{\pi}{2} - \ln 1 = \infty \blacksquare$$

Esta función diverge

20. $$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx + \int_{1+\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to+0}\int_a^{1-\varepsilon} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{1+\varepsilon}^{b} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx \Rightarrow$$

Para integral, $u = -\sqrt{x}$. Cuando $du = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$

$$\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int e^u(-2du) = -2e^u = -2e^{-\sqrt{x}} \blacksquare$$

Resolviendo la integra tenemos:

$$\Rightarrow \lim_{a\to0^+} -2e^{-\sqrt{x}}\Big|_a^1 + \lim_{b\to+\infty} -2e^{-\sqrt{x}}\Big|_1^b = \lim_{a\to+0} -2e^{-1} + 2e^{-\sqrt{a}} + \lim_{b\to+\infty} -2e^{-\sqrt{b}} + 2e^{-1}$$
$$= (-2e^{-1} + 2) + 2e^{-1} = 2 \blacksquare$$

Esta función converge

26. $$\int_1^3 \frac{dy}{\sqrt[3]{y-2}} = \lim_{t\to2^-}\int_1^t \frac{dy}{\sqrt[3]{y-2}} + \lim_{t\to2^+}\int_t^3 \frac{dy}{\sqrt[3]{y-2}} = \lim_{t\to2^-}\int_1^t (y-2)^{-\frac{1}{3}}dy + \lim_{t\to2^+}\int_t^3 (y-2)^{-\frac{1}{3}}dy =$$
$$= \lim_{t\to2^-} \frac{3}{2}(y-2)^{\frac{2}{3}}dy\Big|_1^t + \lim_{t\to2^+} \frac{3}{2}(y-2)^{\frac{2}{3}}dy\Big|_t^3 = \lim_{t\to2^-} \frac{3}{2}(t-2) - \frac{3}{2}$$
$$+ \lim_{t\to2^+} \frac{3}{2} - \frac{3}{2}(t-2) = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0 \blacksquare$$

Esta función converge

29. $Si\, n \le 1$, $$\int_0^1 x^n \ln^2 x\, dx \ge \lim_{a\to0^+}\int_a^1 x^n \ln^2 x\, dx = \lim_{a\to0^+} \frac{1}{3}\ln^3 x\Big|_a^1 = \lim_{a\to0^+} \frac{1}{3}\ln^3 1 - \frac{1}{3}\ln^3 a$$
$$= +\infty \blacksquare$$

Si $Si\, n \le 1$está función diverge

$Si\, n > 1$ integrando por partes tenemos:

$$\int_0^1 x^n \ln^2 x\, dx = \lim_{a\to0^+}\int_a^1 x^n \ln^2 x\, dx = \lim_{a\to0^+} \left.\frac{x^{n+1}\ln^2 x}{n+1} - \frac{2x^{n+1}\ln x}{(n+1)^2} + \frac{2x^{n+1}}{(n+1)^3}\right|_a^1 =$$
$$= \lim_{a\to0^+} \frac{2}{(n+1)^3} - \frac{a^{n+1}\ln^2 a}{n+1} + \frac{2a^{n+1}\ln a}{(n+1)^2} - \frac{2a^{n+1}}{(n+1)^3} = \frac{2}{(n+1)^3} \blacksquare$$

Si $Si\, n > 1$está función converge

34. Explique la diferencia entre:

$$\lim_{t\to0^-}\int_{-1}^{t}\frac{dx}{x} + \lim_{s\to0^+}\int_{s}^{1}\frac{dx}{x} \qquad y \qquad \lim_{t\to0^+}\left(\int_{-1}^{-r}\frac{dx}{x} + \int_{r}^{1}\frac{dx}{x}\right)$$

Por el teorema: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c \frac{dx}{x} + \int_c^b \frac{dx}{x}$

$$\text{Sustituyendo} \Rightarrow \lim_{t\to0^-}\int_{-1}^{t}\frac{dx}{x} + \lim_{s\to0^+}\int_{s}^{1}\frac{dx}{x} \Rightarrow \lim_{s\to0^+}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x} \;\blacksquare$$

Por lo tanto son diferentes.

PAGINA 634 Y 635
EJERCICIOS 25, 26, 28, 32, 57, 58, 65, 77

$$25.\quad \int x^3 \cos x^2\, dx =$$

Cuando $t=x^2$, $dt=2x\,dx$. Entonces $\int x^3\cos x^2\,dx = \int x^2\cos x^2 (x\,dx) = \int \frac{1}{2} t\cos t\,dt$ ■

Ahora $u=\frac{1}{2}t$ y $dv=\cos t\,dt$ entonces $du=\frac{1}{2}dt$ y $v=\sin t$.

$$\int\frac{1}{2}t\cos t\,dt = \frac{1}{2}t\sin t - \int\frac{1}{2}\sin t\,dt = \frac{1}{2}t\sin t + \frac{1}{2}\cos t + C = \frac{1}{2}x^2\sin t + \frac{1}{2}\cos x^2 + C \;\blacksquare$$

$$28.\quad \int\frac{du}{u^{\frac{5}{8}} - u^{\frac{1}{8}}} =$$

Ahora si $z = u^{\frac{1}{8}}$. Entocnes $u = z^8$; $du = 8z^7 dz.\ Luego$:

$$\int\frac{du}{u^{\frac{5}{8}} - u^{\frac{1}{8}}} = \int\frac{8z^7}{z^5 - z}\,dz$$
$$= \int\frac{8z^6}{z^4-1}\,dz$$
$$= \int 8z^2\,dz + \int\frac{8z^2}{z^4-1}\,dz = \int 8z^2\,dz + \int\left(\frac{4}{z^2+1} + \frac{4}{z^2-1}\right)dz =$$
$$= \int 8z^2\,dz + \int\left(\frac{4}{z^2+1} + \frac{2}{z-1} - \frac{2}{z+1}\right)dz$$
$$= \frac{8}{3}z^3 + 4\tan^{-1}z + 2\ln|z-1| - 2\ln|z+1| + C =$$

Sustituyendo $u = z^{\frac{1}{8}}$ y operando tenemos:

$$= \frac{8}{3}u^{\frac{3}{8}} + 4\ln n^{-1}u^{\frac{1}{8}} + 2\ln\left|\frac{u^{\frac{1}{8}} - 1}{u^{\frac{1}{8}} + 1}\right| + C \;\blacksquare$$

$$57.\quad \int_1^2\frac{2x^2+x+4}{x^3+4x^2}\,dx = \int_1^2\left(\frac{2x^2}{x^2(x+4)} + \frac{x+4}{x^2(x+4)}\right)dx = \int_1^2\left(\frac{2}{x+4} + \frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= \left[2\ln|x+4| - \frac{1}{x}\right]_1^2 = \frac{1}{2} + 2\ln\frac{6}{5} \;\blacksquare$$

57. $\int_{\pi/12}^{\pi/6} \cot^3 2y\, dy = \int_{\pi/12}^{\pi/6} \cot 2y(\csc^2 2y - 1)\, dy = \left[-\frac{1}{4}\cot^2 2y - \frac{1}{2}\ln\sin 2y\right]_{\pi/12}^{\pi/6} =$

$$= \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ln 2 \blacksquare$$

EJERCICIOS VARIOS DE CÁLCULO INTEGRAL

$$\int (x^9 - 2\,x^5 + 3\,x)\, dx = \frac{x^{10}}{10} - \frac{x^6}{3} + \frac{3\,x^2}{2}$$

$$= \int x^9\, dx - 2\int x^5\, dx + 3\int x\, dx$$

$$= \int x^9\, dx - \frac{x^6}{3} + 3\int x\, dx$$

$$= \int x^9\, dx - \frac{x^6}{3} + \frac{3\,x^2}{2}$$

$$= \frac{x^{10}}{10} - \frac{x^6}{3} + \frac{3\,x^2}{2}$$

$$\int x^{3/7}\, dx = \frac{7\,x^{10/7}}{10}$$

$$\int \frac{t^6 - t^2}{t^4}\, dt = \int \left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right) dt$$

$$= \int t^2\, dt - \int \frac{1}{t^2}\, dt$$

$$= \int t^2\, dt + \frac{1}{t}$$

$$= \frac{t^3}{3} + \frac{1}{t}$$

$$\int (x^3-1)^2\,dx$$
$$=\int (x^6-2x^3+1)\,dx$$
$$=\int x^6\,dx-2\int x^3\,dx+\int 1\,dx$$
$$=\int x^6\,dx-\frac{x^4}{2}+\int 1\,dx$$
$$=\frac{x^7}{7}-\frac{x^4}{2}+\int 1\,dx$$
$$=\frac{x^7}{7}-\frac{x^4}{2}+x$$

$$\int \frac{3}{t^4}\,dt$$
$$=3\int \frac{1}{t^4}\,dt$$
$$=-\frac{1}{t^3}$$

$$\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$$
$$=\int \left(x^2+\frac{1}{x^2}+2\right) dx$$
$$=\int \frac{1}{x^2}\,dx+\int x^2\,dx+\int 2\,dx$$
$$=\int x^2\,dx-\frac{1}{x}+\int 2\,dx$$
$$=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+\int 2\,dx$$
$$=\frac{x^3}{3}+2x-\frac{1}{x}$$

$$\int (x-1)(3x+2)\,dx$$
$$=\int (3x^2-x-2)\,dx$$
$$=3\int x^2\,dx+\int -2\,dx-\int x\,dx$$
$$=x^3+\int -2\,dx-\int x\,dx$$
$$=x^3-\frac{x^2}{2}+\int -2\,dx$$
$$=x^3-\frac{x^2}{2}-2x$$

$$\int\left(\sqrt[3]{r}+\frac{1}{\sqrt[3]{r}}\right)dr$$
$$=\int\frac{1}{\sqrt[3]{r}}\,dr+\int\sqrt[3]{r}\,dr$$
$$=\frac{3\,r^{2/3}}{2}+\int\sqrt[3]{r}\,dr$$
$$=\frac{3\,r^{4/3}}{4}+\frac{3\,r^{2/3}}{2}$$
$$=\frac{3}{4}\left(r^{2/3}+2\right)r^{2/3}$$

$$\int(\cos(\theta)+2\sin(\theta))\,d\theta$$
$$=2\int\sin(\theta)\,d\theta+\int\cos(\theta)\,d\theta$$
$$=\int\cos(\theta)\,d\theta-2\cos(\theta)$$
$$=\sin(\theta)-2\cos(\theta)$$

$$\int\csc(x)\cot(x)\,dx=-\csc(x)$$

$$\int\sec^2(\theta)\,d\theta=\tan(\theta)$$

$$\int 8\,e^x\,dx$$
$$=8\int e^x\,dx$$
$$=8\,e^x$$

EJERCICIOS 7.2

1. $\int e^x \tan^2(e^x)\,dx$

u=e^x

du=e^x

usando $\int tan^2 u\,du=\tan u-u$

$=\int \tan^2 u\, du = \tan e^x - e^x + c$

13.- $\int x \cot^2 2x^2\, dx$

u=e^x

du= $e^x\, dx$

usando: $\int cot^2 u\, du = -\cot u - u$

$=\frac{1}{4}\int cot^2 u\, du =$ $\frac{1}{4}\cot 2x^2 - 2x^2 + c$

14.- $\int cot^2 4t\, dt$

u= 4t

du= 4 dt

$=\frac{1}{4}\int cot^2 u\, du$

$=\frac{1}{4}\ \cot 4t - 4t\ + c$

$=\frac{cot\, 4t}{4} - t + c$

15.- $\int \boldsymbol{cot\ ^3 t\ \ dt}$

Usando algunas identitades trigonométricas obtenemos:

$=\cot t\ \frac{\cos^2 t}{sen^2 t}$

$=\cot t\ \frac{1-sen^2 t}{sen^2 t}$

$=\frac{\cot t}{sen^2 t} - \cot t$ $\quad => \int cot^3 t\, dt = \int \frac{\cot t}{sen^2 t} - \cot t\, dt$

$=\int \frac{\cot t}{sen\, t^2} dx - \int \cot t\, dt$

$=-\frac{1}{2} cot^2 t - \ln sen x + c$

16.- $\int \tan^4 x\, dx$

$=\int \tan^2 x \tan^2 x\, dx$

Utilizando identidades trigonométricas

$= \tan^2 x = \sec^2 x - 1$

Sustituyendo

$= \int \sec^2 x - 1 (\tan^2 x) dx$ desarrollamos $\int \sec^2 x \tan^2 x - \tan^2 x \, dx$

$= \int \sec^2 x \tan^2 x - \int \tan^2 x dx$

Por identidad:

$= \tan^2 x = \sec^2 x - 1 = \int \sec^2 x \tan^2 x - \int \sec^2 x - 1 dx$

$= \int \sec^2 x \tan^2 x dx - \int \sec^2 x dx + \int dx$

$= \int \tan^2 x \sec^2 x dx$

u= tanx

$du = \sec^2 x dx$

dx= $\frac{du}{sec^{\,2} x}$

$= \int u^2 \; du = \frac{1}{3} u^3 + c$

18. $\int \csc^3 x dx$

$= \int \quad csc^2 x \quad \csc \quad x \quad dx$

$dv = \csc^2 x dx$

v= -cot x

u= csc x

du= cot x csc x dx

$= \int csc^2 x \csc x \, dx = -\cot x \csc x — \cot x \,(-\cot x \csc x \, dx)$

=-cot x csc x -$\int cot^2 \csc x \, dx$

Luego escribimos a $cot^{\,2} x$ como $csc^2 x - 1$ tenemos

$= \int csc^3 x dx = \int -csc^2 x \csc x dx = -\cot x \csc x - \int csc^2 x - 1 \csc x dx$

$= \int csc^3 x \, dx = -\cot x \csc x - \int csc^3 x - \csc x \, dx$

$= \int \; csc^3 x \quad dx \quad + \int \; csc^3 x \quad = \quad -cotx \quad \csc \; x \quad + \quad \int \quad \csc \; x \; dx$

$= \int csc^3 x\,dx = -\cot x \csc x - \int csc^3 x\,dx + \int \csc x\,dx$

$= \int csc^3\ x\ dx + \int csc^3\ x\ dx = -\cot x \csc x + \int \csc x\ dx$

$= 2\int csc^3 x\,dx = -\cot x \csc x + \int \csc x\,dx = \int csc^3 x\,dx = -\frac{1}{2}\cot x \csc x + \frac{1}{2}\int \csc x\ dx$

Lo multiplicamos por (cscx-cotx) =1

$=> \int csc^3 x\ dx = -\frac{1}{2}\cot x \csc x + \frac{1}{2}\int \frac{\csc\ x(\csc\ x+\cot\ x)}{\csc x - \cot x}\,dx$

$= \int\ csc^3\ \ x\ \ dx\ = -\frac{1}{2}cit\ \ x\ \ \csc\ \ x + \frac{1}{2}\int \frac{csc\ \ x - \csc\ \ x + \cot\ \ x}{\csc x - \cot x - dx}$

$= \int\ cscs^3\ x\ \ dx\ = -\frac{1}{2}\cot x \csc x + \frac{1}{2}\int \frac{csc\ \ x - \csc\ \ x + \cot\ \ x}{\csc x - \cot x\ dx}$

$= \int\ csc^3\ x\ dx = -\frac{1}{2}\cot x \csc x + \frac{1}{2}ln \csc x - \cot x + c$

29.- $\int_1^4 \sqrt{x}\ inx\ dx$

Primero obtenemos la anti derivada

$\int \sqrt{x}\,inx\,dx = \int x^{1/2} inx\,dx$

Tomamos $dv = x^{1/2}$ y $u = inx$ entonces $v = \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2x^{3/2}}{3}$ y $du = \frac{1}{x}$

$\int x^{1/2} inx\,dx = \frac{2x^{3/2}}{3} inx - \int \frac{2x^{3/2}}{3}\frac{1}{x}\,dx = \frac{2x^{3/2}}{3} inx - \frac{2}{3}\int \frac{x^{3/2}}{x}\,dx$

$= \frac{2x^{3/2}}{3} inx - \frac{2}{3}\int x^{1/2}dx = \frac{2x^{3/2}}{3} inx - \frac{2}{3}\frac{2x^{3/2}}{3} = \frac{2x^{3/2}}{3}\ in\,x - \frac{2}{3}$

Después sustituimos la anti derivada en la integral definida

$\int_1^4 \sqrt{x}\,inx\,dx = \left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} inx - \frac{2}{3}\right]_1^4 = \frac{2\ 4^{\frac{3}{2}}}{3}\ in\ 4 - \frac{2}{3} - \frac{2\ 1^{\frac{3}{2}}}{3}\ in\,1 - \frac{2}{3}$

$= \frac{16}{3} in\ 4\ - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{16}{3} in\,4 - \frac{32}{9} + \frac{4}{9} = \frac{16}{3} in\,4 - \frac{28}{9}$

$= 4.282458815$

30.- $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} x\cot x\cos x\,dx$

Primero obtenemos la anti derivada

$\int x\cot x\cos x\,dx$

Tomamos $dv = \cot x \cos x$ y $u = x$ entonces $v = -\cos x$ y $du = 1$ entonces

$\int x\cot x\cos x\,dx = -x\cos x - \int -\csc x\,dx = -x\cos x - \int -1\csc x\,dx =$

$= -x\cos x + \int \csc x\,dx = -x\cos x + \ln|\csc x - \cot x|$

Después sustituimos la anti derivada en la integral definida

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} x\cot x\cos x\,dx = \left[-x\cos x + \ln|\csc x + \cot x|\right]_{\pi/4}^{3\pi/4}$$

$$= -\frac{3\pi}{4}\cos\frac{3\pi}{4} + \ln\csc\frac{3\pi}{4} - \cot\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} + \ln\csc\frac{\pi}{4} - \cot\frac{\pi}{4}$$
$$= -.46869$$

31.- $\int_2^4 \sec^{-1}\sqrt{t}\,dt$

Primero obtenemos la anti derivada

$\int \sec^{-1}\sqrt{t}\,dt$

Tomamos $u = \sqrt{t}$ y $du = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ entonces

$\int \sec^{-1}\sqrt{t}\,dt = 2\int u\sec^{-1}u\,du$

Para obtener la anti derivada de $2\int u\sec^{-1}u\,du$ tomamos $f = \sec^{-1}u$ y $dg = u$ entonces $df = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}$ y $g = \frac{u^2}{2}$

$$2\int u\sec^{-1}u\,du = u^2\sec^{-1}u - \int\frac{u^2}{u\sqrt{u^2-1}}\,du = u^2\sec^{-1}u - \int\frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\,du$$

Para obtener la anti derivada de $\int\frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\,du$ usamos $s = u^2 - 1$ y $ds = 2u$ entonces

$$u^2\sec^{-1}u - \int\frac{u}{\sqrt{u^2-1}}\,du = u^2\sec^{-1}u - \frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{s}}\,ds = u^2\sec^{-1}u - \sqrt{s}$$
$$= t\sec^{-1}\sqrt{t} - \sqrt{t-1}$$

Sustituyendo en la integral definida

$$\int_2^4 sec^{-1}\sqrt{t}\,dt = t\,sec^{-1}\sqrt{t} - \sqrt{t-1}\,\Big|_2^4 = 4sec^{-1}\sqrt{4} - \sqrt{3} - 2sec^{-1}\sqrt{2} + 1$$

$$= 4sec^{-1}\sqrt{4} - 2sec^{-1}\sqrt{2} - \sqrt{3} + 1 = \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3} + 1$$

32.-$\int_0^1 x\, sen^{-1}x\, dx$

Primero obtenemos la anti derivada

$$\int x\, sen^{-1}x\, dx$$

Tomamos $dv = x$ y $u = sen^{-1}x$ entonces $v = \frac{x^2}{2}$ y $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int x\, sen^{-1}x\, dx = \frac{x^2}{2} sen^{-1}x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{x^2}{2} sen^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Después obtenemos la anti derivada de $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ por medio de: $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}\left(-u\sqrt{a^2-u^2} + a^2 sen^{-1}\frac{u}{a}\right)$

Entonces $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}\left(-x\sqrt{1-x^2} + sen^{-1}x\right)$ después sustituimos esta anti derivada en la primera

$$\int x\, sen^{-1}x\, dx = \frac{x^2}{2} sen^{-1}x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{x^2}{2} sen^{-1}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= \frac{x^2}{2} sen^{-1}x - \frac{1}{4}\left(-x\sqrt{1-x^2} + sen^{-1}x\right) = \frac{1}{4}\left(x\sqrt{1-x^2} + (2x^2-1)\,sen^{-1}x\right)$$

Después sustituimos la anti derivada en la integral definida

$$\int_0^1 x\, sen^{-1}x\, dx = \frac{1}{4}\left[x\sqrt{1-x^2} + (2x^2-1)\, sin^{-1}x\right]_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}$$

$$= \frac{1}{4}\left[1\sqrt{1-1^2} + (2(1)^2-1)\, sin^{-1}1\right] - \frac{1}{4}\left[0\sqrt{1-0^2} + (2 0^2-1)\, sin^{-1}0\right]$$

$$= \frac{1}{4}\, sin^{-1}1 = \frac{\pi}{8}$$

33.-$\int_1^3 x^3 e^x\, dx$

Primero obtenemos la anti derivada

Tomamos $dv = e^x$ y $u = x^3$ entonces $v = e^x$ y $du = 3x^2$

$$x^3e^xdx = e^xx^3 - 3x^2e^xdx = e^xx^3 - 3\ x^2e^xdx$$

Para obtener la anti derivada de $\int x^2\, e^x\, dx$ tomamos $dv = e^x$ y $u = x^2$ entonces $v = e^x$ y $du = 2x$ entonces

$$x^2e^xdx = e^xx^3 - 2xe^xdx = e^xx^3 - 2\ xe^xdx$$

Para obtener la anti derivada de $\int xe^x dx$ tomamos $dv = e^x$ y $u = x$ entonces $v = e^x$ y $du = 1$ entonces

$$xe^xdx = xe^x - e^xdx = xe^x - e^x$$

Después sustituimos todos los valores obtenidos

$$x^3e^xdx = e^xx^3 - 3e^xx^3 - 2xe^x - e^x = e^xx^3 - 3e^xx^3 - 2xe^x + 2e^x$$
$$= e^xx^3 - 3e^xx^2 + 6xe^x - 6e^x = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$$

Después sustituimos la anti derivada en la integral definida

$$\int_1^3 x^3\ e^x\ dx = e^x\ \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right)\Big|_{\mathbf{1}}^{\mathbf{3}}$$
$$= e^3\left(3^3 - 3(3)^2 + 6(3) - 6\right) - e^1\left((1)^3 - 3(1)^2 + 6(1) - 6\right)$$
$$= e^3(12) - e^1(-2) = 246.4630067$$

34.- $\int_0^4 x^2\, e^{x\,2}\, dx$

Primero obtenemos la anti derivada

$$x^2\, e^{x\,2} dx$$

Tomamos $dv = e^{x\,2}$ y $u = x^2$ entonces $v = e^{x\,2}$ y $du = 2x^2$

$$x^2e^{x2}dx = 2e^{x2}x^2 - 2x2e^{x2}dx = e^{x2}x^2 - 4\ xe^{x2}dx$$

Para obtener la anti derivada de $\int xe^{x\,2}dx$ tomamos $dv = e^{x\,2}$ y $u = x$ entonces $v = 2e^{x2}$ y $du = 1$ entonces

$$xe^{x2}dx = x2e^{x2} - 2e^{x2}dx = x2e^{x2} - 2e^{x2}dx = x2e^{x2} - 2e^{x2}dx$$

$$= x2e^{x\,2} - 2(2)e^{x\,2}$$

Después sustituimos todos los valores obtenidos

$$x^2\,e^{x\,2}dx = 2e^{x\,2}x^2 - 4\;2xe^{x\,2} - 2\;2\;e^{x\,2} = 2e^{x\,2}x^2 - 8xe^{x\,2} + 16e^{x\;\;2}$$

$$= 2e^{x\,2}(x^2 - 4x + 8)$$

Después sustituimos la anti derivada en la integral definida

$$\int_0^4 x^2\,e^{x\,2}\,dx = 2e^{x\,2}\,x^2 - 4x + 8\Big|_{\mathbf{0}}^{\mathbf{4}} = 2e^{4\,2}\,4^2 - 4(4) + 8 - 2e^{0\,2}\,0^2 - 4(0) + 8$$

$$= 16e^2 - 16 = 102.2248976$$

Determine el área de la región delimitada por la curva $y = inx$ el eje x y la recta $x = e^2$

$$\text{área} = \int_1^{e\,2} inx\,dx$$

Primero obtenemos la anti derivada

$$inx\,dx = x(-1 + inx)$$

Después sustituimos la anti derivada en la integral definida

$$\int_1^{e\,2} inx\;dx = x\,-1 + inx\Big|_{\mathbf{0}}^{e^2} = e^2 - 1 + in(e^2) - 1\,-1 + in\,1 = e^2 - 1 + in(e^2) + 1$$

$$= e^2 - 1 + 2 + 1 = e^2 + 1 = 8.38906$$

30.

$$\frac{tan^3\;\overline{x}}{\overline{x}}\,dx$$

$u = \sqrt{x}$

$du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$

$= 2 \int tan^3 u\, du$

$= tan^2 u - 2 \int \tan u\, du$

$= tan^2 u + 2 In(\cos u) + C$

$= tan^2 \sqrt{x} + 2\, In(\cos \sqrt{x}) + C$

31. $\int \frac{csc^4 x}{cot^2 x} dx = \int \frac{1}{sen^2 x} \cdot \frac{sen^2 x}{cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{sen^2 x cos^2 x} = \int \frac{4dx}{sen^2 2x} =$
$4csc^2 2x dx = -2cot 2x + c$

33.

$\int \frac{sec^3 x}{tan^4 x} dx$

$= \int \cot(x)(csc^3 x) dx$

$u = \csc x$

$du = -\cot(x)\csc(x) dx$

$= -\int u^2\, du$

$$= -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{1}{3}\csc^3 x + C$$

35.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,dx$$

$$= \frac{1}{3} sen\ x\ \cos^2 x + \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$$

$$= \frac{2senx}{3} + \frac{1}{3} senx\cos^2 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{12}\left(9senx + sen(3x)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{12}\left(9sen\frac{\pi}{2} + sen3\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}$$

$$37. \int_o^1 sen^4 \pi x dx = \int_0^1 \left(\frac{1-\cos\pi x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \left(1 - 2\cos\pi x + \cos^2\pi x\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x - \frac{1}{2\pi} senx\pi x\right]_o^1 + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1+\cos 2\pi x}{2}\,dx = \frac{1}{4} + \left[\frac{1}{8}x + \frac{1}{16\pi} sen2\pi x\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$3\int_0^1 sen^3 \pi t\, dt = \int_0^1 sen^2 \pi t\, sen\, \pi t\, dt = \int_0^1 \ 1 -$$

cos212πt−2πdcos1ππt=−2πcos12πt−13cos312πto1=−2π−2 3=43π

Resolver

22.-

$\int \cos^{-1} 2x$ =

U=cos⁻¹2x **du=** $\frac{2\,dx}{\overline{1-4x^2}}$

Dv= dx **v=x**

Sustituimos

$x\cos^{-1} 2x + \int \frac{2\,dx}{\overline{1-4x^2}} = \quad \cos^{-1} 2x - \frac{1}{2} \quad \overline{1-4x^2} + C$

23.-

$\int \cos \bar{x} =$ **sustituimos**

X=t² **dx=2t dt**

$\int cos\, x \;=\; \int 2t \cos t\, dt$

U= 2t du= dt

Dv= cos t dt v= sen t

$2t\, sin\, t - \int 2 \sin t\, dt = 2t\sin t + 2\cos t + C$

24.-

a) $\tan^{-1}\sqrt{x}\,dx=$

t= $\sqrt{x}$ x=t² dx= 2t dt

$$2x\tan^{-1}t\,dt$$

Integramos por partes U=$\tan^{-1}t$

du=$\frac{dt}{1+t^2}$

V=t²+1 **dv=2t dt**

$$t^2+1\tan^{-1}t-\int\frac{t^2+1}{t^2+1}dt=\ t^2+1\tan^{-1}t-\int 1\,dt=t^2+1\tan^{-1}t-t+c=$$
$$x+1\ \tan^{-1}\sqrt{x}-\sqrt{x}+c$$

Encontrar la integral

25.-

a) $\int_0^2 x^2 3^x\,dx=$

$u=x^2$ $du=2x$

Dv=3ˣ **v=$\frac{3^x}{ln3}$**

$$\frac{3^x x^2}{ln3}-\frac{2}{ln3}\int x3^x$$

U=x **du= dx**

V=$\frac{3^x}{ln3}$ **dv= 3ˣ dx**

$$\frac{3^x x^2}{ln3}-\frac{2}{ln3}\left(\frac{3^x x}{ln3}-\frac{1}{ln3}\int 3^x\right)=\frac{3^x x^2}{ln3}-\frac{2x3^x}{(ln3)^2}+\frac{2\,3^x}{(ln\ 3)^3}+c$$

26.-

$$\int_{-1}^{2} \ln x+2\, dx$$

U=ln (x+2) du= $\frac{dx}{x+2}$

V= x+2 dv= dx

= $x+2 \quad \ln \; x+2 \quad -x+c$ = {(4 ln4)-2} – (-1)= 4.54

27.-

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin 3w \cos w \, dw$$

U=$\sin 3w$ du=3$\cos 3w\, dw$

V= $\sin w$ dv=$\cos w\, dw$

$\sin 3w \sin w - 3 \cos 3w \sin w \; dw$

u= $\cos 3w$ du=-$\sin 3w$ dw

v= -$\cos w$ dv=$\sin w\, dw$

= $\sin 3w \; \sin w - 3(-\cos 3w \cos w - 3 \int \sin 3w \cos w = -8 \int \sin 3w \cos w \; dw = \sin 3w - \sin w \; + \cos 3w - \cos w + 8 \; c$

entonces

=$-\frac{1}{8}\sin 3w \sin w - \frac{3}{8}\cos 3w \cos w + c$

TEMA III

VARIABLES COMPLEJAS

(Métodos Matemáticos)

NUMEROS COMPLEJOS **BLOQUE I**

En esta parte estudiaremos la estructura algebraica y geométrica de los números complejos.

1.1 DEFINICIÓN

Los *números complejos z* se pueden especificar como pares ordenados de números reales x e y, con las operaciones de suma y producto que especificaremos mas adelante.

$$z = x, y \quad [1]$$

Se suelen identificar los pares (x,0) con los números reales x. el conjunto de los números complejos contiene, por tanto, a los números reales como subconjunto. Los números complejos de la forma (0,y) y se llaman números *imaginarios puros* . los números reales x e y en la expresión [1] se conocen, respectivamente, como *parte real* y *parte imaginaria* de z. escribiremos:

Re z= x Im z= y [2]

Dos números complejos $(x_1 y_1)$ y $(x_2 y_2)$ se dicen iguales si tienen iguales las parte real e imaginaria. Es decir:

$(x_1 , y_1) = (x_2 , y_2)$ si y solo si $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. [3]

La suma $z_1 + z_2$ y el producto $z_1 * z_2$ de los números complejos $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$ se define por las ecuaciones:

$(x_1 , y_1) + (x_2 , y_2) = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$, [4]

$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, y_1 x_2 + x_1 y_2)$ [5] Donde $(z_1, z_2) \in$ ₵

1.2 PROPIEDADES ALGEBRAICAS

Varias propiedades de la suma y del producto de números complejos coinciden con la de los números reales. Veremos aquí las más básicas y verificaremos algunas de ellas.

Ley conmutativa

$z_1+z_2=z_2+z_1$, $\quad z_1*z_2=z_2*z_1$

Ley asociativa

$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$, $\quad (z_1*z_2)z_3=z_1(z_2*z_3)$

Ley distributiva

z $(z_1 + z_2)$ = (z * z_1) +(z * z_2)

Ahora tenemos

$$z_1 \in ₵$$

$z_1^{-1} = \frac{1}{z_1}$ donde $z_1 \neq 0$

$z_1 z_2^{-1} = \frac{z_1}{z_2} = z_1 \frac{1}{z_2}$ donde $z_2 \neq 0$

$\frac{1}{z * z_1} = \frac{1}{z_1} * \frac{1}{z_2}$ donde $z_2 \neq 0 \wedge z_1 \neq 0$

Ejemplo.- resolver $\frac{1}{2-3i} \quad \frac{1}{1+i}$

Entonces $\frac{1}{2-3i} \quad \frac{1}{1+i} = \frac{1}{2+2i-3i-3i^2} = \frac{1}{2-3i^2-i} = \frac{1}{5-i}$

Ahora multiplicamos por su conjugado $\frac{1}{5-i} * \frac{5+i}{5+i} = \frac{5+i}{26} = \frac{5}{26} + \frac{1}{26}$i

NOTA: el ordenamiento que tienen los números reales no se hace extensivo para los números complejos

1.3 COORDENADAS CARTESIANAS

Es natural asociar el numero complejo z = x, yi con un punto en el plano cuyas coordenadas rectangulares son x, y (Figura 1). Cada número corresponde a un punto exactamente, y recíprocamente.Por ejemplo.- ubicar el punto (-2 + 1) en el plano (Figura 2)

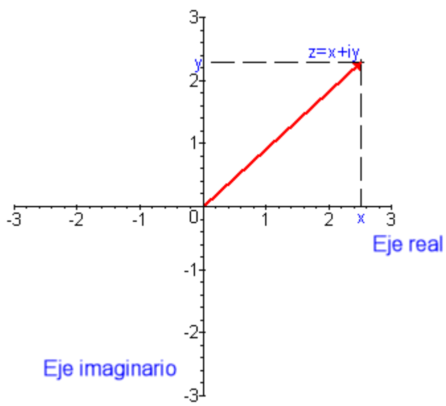


Figura 1

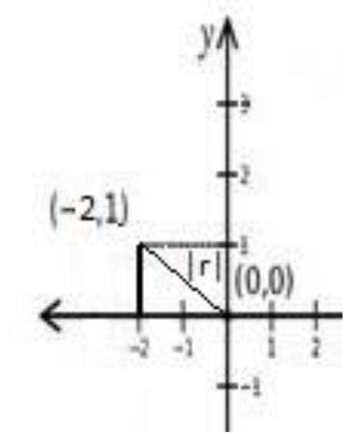


Figura 2

El modulo o valor absoluto de un numero complejo z = x, y se define como un numero real no negativo que es la raíz de $x^2 + y^2$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Nota: * El valor absoluto de z siempre es z ≥ 0, no existen las distancias negativas

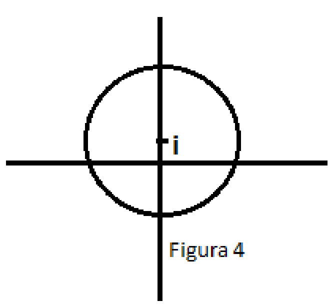
* Las distancias si pueden compararse porque son números reales P/E $|z_1| < |z_2|$

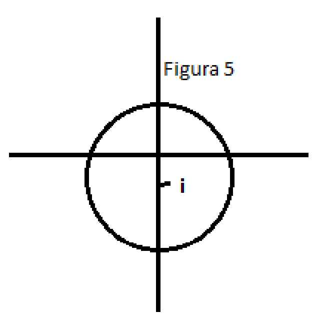
* La distancia entre dos números complejos si se puede comparar (distancia entre vectores)

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

* La suma de complejos (ley del paralelogramo)

Notar que los puntos contenidos en la circunferencia con centro en (0,1) y r=3 satisface la ecuación |z – i| = 3 (Figura 4) y recíprocamente a este conjunto de puntos se denotan como la circunferencia |z - i| = 3. Ahora tenemos |z + i| = 3 (Figura 5)





Recordar: $|z|^2 = (R_e\ z)^2 + (Im\, z)^2$

Relaciones de orden $|z| \geq |R_e\, z| \geq R_e\, z$

$|z| \geq |Im\, z| \geq Im z$Z=

$x+y_i$suconjugado$z = x - y_i$ Propiedades i = z

$_1 + z_2 = z_1 + z_2$

ii = $z_1 - z_2 = z_1 - z_2$

iii = $z_1 * z_2 = z_1 * z_2$

iv = $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}$

Ejemplo.- a)$z + z = x + y + (x - y_i) = 2x$ b)

$z - z = x + y - (x - y_i) = 2y \Rightarrow 2Im z$

c) $z * z = x + y * (x - y_i) = x^2 + y^2 \Rightarrow (x + y)^2$

d) $\frac{-1+3i}{2-i} = \frac{-1+3i}{2-i}\frac{2+i}{2+i} = \frac{-2-i+6i+3i^2}{4+2i-2i-i^2} = \frac{-5+i}{5}$

1.4 DESIGUALDAD DEL TRIANGULO

La propiedad de los módulos y de la interpretación geométrica hacen posible deducir algebraicamente la desigualdad triangular, se proporciona una cota superior al modulo de la suma de dos números complejos $z_1 z_2$.(Figura 6)

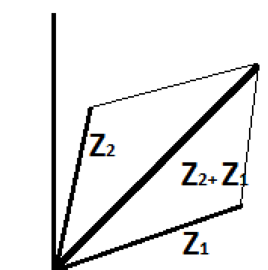


figura 6

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ [1]

la desigualdad triangular se cumple para dos o mas distancias

$\sum_{i=1}^{n} z_i \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i|$ Porque $||z_1 = z_1 + z_2 - z_2| \Rightarrow |z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$

Como los módulos son no negativos, se deduce a desigualdad [1]

Ejemplo.- Si un punto z esta en el circulo unidad $|z| = 1$ centrado en el origen, entonces

$|z^2 + z + 1| \leq |z|^2 + z + 1 = 3$

$|z^3 - 2| \geq |z|^3 - 2 = 1$

1.5 FORMA POLAR

Sea *r* y θ coordenadas polares del punto x, y que corresponde a un numero complejo no nulo z = x, y_i . Como

$$x = r \cos\theta \qquad e \qquad y = r \sin\theta \ . \qquad [1]$$

z puede ser expresado en forma polar como

$$z = r \cos\theta + i \sin\theta \ [2]$$

El análisis complejo, no se admiten *r* negativos: sin embargo, como en el cálculo, θ tiene infinitos valores posibles, incluyendo valores negativos.

Para calcular numero complejo z≠0 le corresponde solo un valor de θ entre, 0 ≤ θ ≤ 2π; θ se llama el argumento de z y se denota θ = *arg z*

Observación: geométricamente el ángulo se denota en radianes $\theta = \frac{y}{x}$

Ejemplo.- El numero complejo 1 – *i,*que esta en el cuarto cuadrante, pasa a ser

$$1 - i = \ 2 \ (\cos -\frac{\pi}{4}) + (i \sin -\frac{\pi}{4}) \qquad [3]$$

En forma polar. Obsérvese que cualquiera de los valores

θ = $-\frac{\pi}{4} + 2n\pi \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \dots . .$

Puede ser usado aquí. Por ejemplo,

$$1 - i = 2 \cos \frac{7\pi}{4}) + i \sin \frac{7\pi}{4})$$

El numero positivo *r* es la longitud del vector correspondiente a *z*; es decir, *r* =|z|.

1.6 POTENCIAS Y RAICES

Las potencias enteras de un numero complejo no nulo *z* = $re^{i\theta}$ vienen dadas por

$z^n = r^n e^{in\theta} \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\dots . .$ [1]

Cuando s expresa en la forma

$$\cos\theta + i \sin\theta^{\ n} = \cos n\theta + i \sin n\theta \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \dots . .$$

Se le conoce como la *formula De Moivre.*

La ecuación [1] es útil para el cálculo de raíces de números complejos no nulos.

Recordar:

La fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Para todo numero real. Aquí e es la base del logaritmo natural, i es la unidad imaginaria, $\sin\theta\ \ y \cos\theta$ son funciones trigonométricas.

O bien:

$$e^{z} = e^{\theta + iy} = e^{\theta} \quad \cos\theta + i\sin\theta$$

Siendo *z* la variable compleja formada por: z = x, iy .

ANEXO I

Conjunto de posibles raíces.

Existe un método para encontrar un conjunto de números, los cuales pueden ser raíces de un polinomio. La regla que mencionáremos aquí es aplicable sólo para polinomios con el coeficiente de la potencia mayor de x igual a 1. Es decir, si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ tomáremos a $a_n = 1$. Esto es que sólo trabajaremos con polinomios de la siguiente forma:

$$\mathbf{f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$$

El conjunto de posibles raíces de f(x) se forma con los divisores de a_0 (del término independiente), hay que considerar estos divisores tanto con signo positivo como con negativo.

La forma en que podemos usar esta información del término independiente es la siguiente, puesto que cualquier elemento de este conjunto puede ser raíz de f(x) hay que evaluar a f(x) en algún valor de este conjunto y si el resultado de la evaluación es cero, entonces ese valor escogido es raíz de f(x).

En la siguiente tabla mostramos varios polinomios, los divisores del término independiente y las raíces de los polinomios:

Función	Divisores del término independiente	Raíces
$f(x)= x^2 + x - 12$	1, 2, 3, 4, 6, 12, -1, -2, -3, -4, -6, -12	- 4 y 3
$f(x)= x^3 - 4x^2 + x + 6$	1, 2, 3, 6, -1, -2, -3, -6	- 1, 2 y 3
$f(x)= x^4 - 5x^2 + 4$	1, 2, 4, -1, -2, -4	- 2, - 1, 1 y 2
$f(x)= x^3 - 2x^2 - 5x + 6$	1, 2, 3, 6, -1, -2, -3, -6	1, - 2 y 3

EJERCICIOS DEL BLOQUE:

1. Efectuar cada una delas operaciones indicadas.

a) $35 + 25i + (-12 - 5i)$

$(35\text{-}12) + (25\text{-}5)\ i = 23{+}20i$

b) $-75 - i\ +\ \ 34 + 42i$

$(\text{-}75{+}34) + (\text{-}1{+}42)\ i = \text{-}41{+}41i$

c) $22 - 34i\quad 44 + 52i$

$((22)\ (44)\ \text{-}\ (\text{-}34)\ (52)) + ((22)\ (52) + (\text{-}34)\ (44))\ i$

$= (968 + 1768) + (1144 - 1496)\ i = 2736 - 352i$

d) $49 - 32i\quad 25 - 6i$

$((49)\ (25) - (\text{-}32)\ (\text{-}6)) + ((49)\ (\text{-}6) + (\text{-}32)\ (25))\ i$

$= (1225 - 192) + (\text{-}294 - 800)\ i = 1033 - 1094i$

e) $1 - 3i\ \ {-1} + 2i\ (55 - 47i)$

$((1)\ (\text{-}1) - (\text{-}3)\ (2)) + ((1)\ (2) + (\text{-}3)\ (\text{-}1))\ i$

$= (\text{-}1 + 6) + (2 + 3)\ i = 5 + 5i$

$>> ((5)\ (55) - (5)\ (\text{-}47)) + ((5)\ (\text{-}47) + (5)\ (55))\ i$

$= (275 + 235) + (\text{-}235 + 275)\ i = 510 + 40\ i$

f) $\frac{32-23i}{-11+i}$

$$\frac{(32+23)(-11-1)}{(-11+1)(-11-1)} = \frac{32\quad -11\ +\ 23\quad -1\quad +\quad 32\quad -1\ -\ 32\quad -11\quad i}{122} = \frac{-352\ -23\ +\ -32-352\quad i}{122}$$

$$= \frac{-375\ -384\ i}{122} = -\frac{375}{122} - \frac{192}{61}i$$

g) $\frac{35+5i}{6-64i}{}_{20} + {}_{13}\frac{250}{1+3i}$

h) $\frac{12i\quad -i}{62i\ -11}$

i) $\frac{(2+i)(3-2i)(1+i)}{(1-i)^2}$

j) $(2i-1)^2 \frac{4}{1-i} + _3\overline{2-i}\,1+i$

k) $\frac{1+i}{1-i}^{2} - 2\,\frac{1-i}{1+i}$

2. Si $z_1 = 1-i, z_2 = -2+4i, z_3 = 5 + \frac{2i}{2}$, hallar el valor numérico de cada una de las siguientes expresiones.

a) $3z_1 - 4z_2$

$3_3 1 - i_2 - 4\; -2 + 4i \; = 3 - 3i + 8 - 16i = 11 - 19i$

b) $z_1 - 3z_1 + 4z_1 - 8$

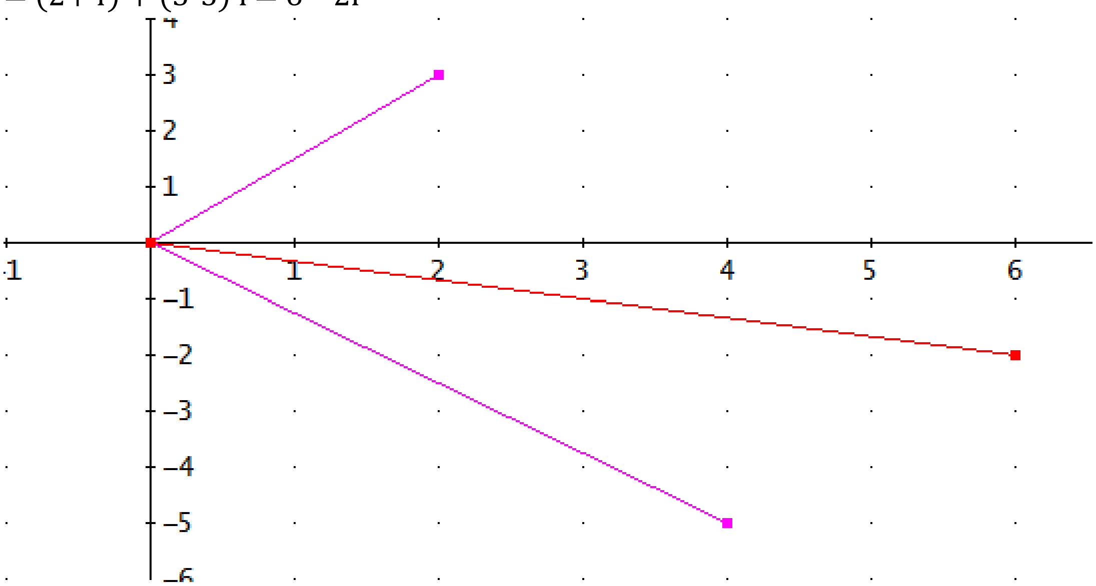
c) $\frac{2z_2 + z_1 - 5 - i}{2z_1 - z_2}^{2} + 3 - 1$

3. Representación gráfica de números complejos

Efectuar las operaciones indicadas en forma analítica y gráficamente.

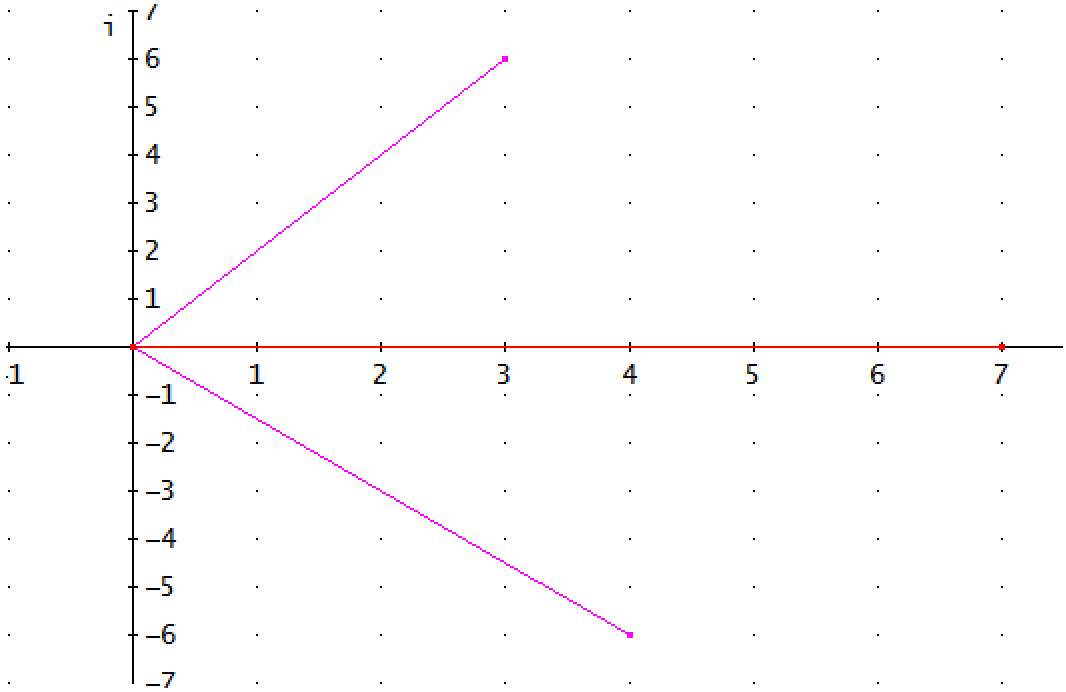
a) (2+3i) + (4-5i)

= (2+4) + (3-5) i = 6 – 2i

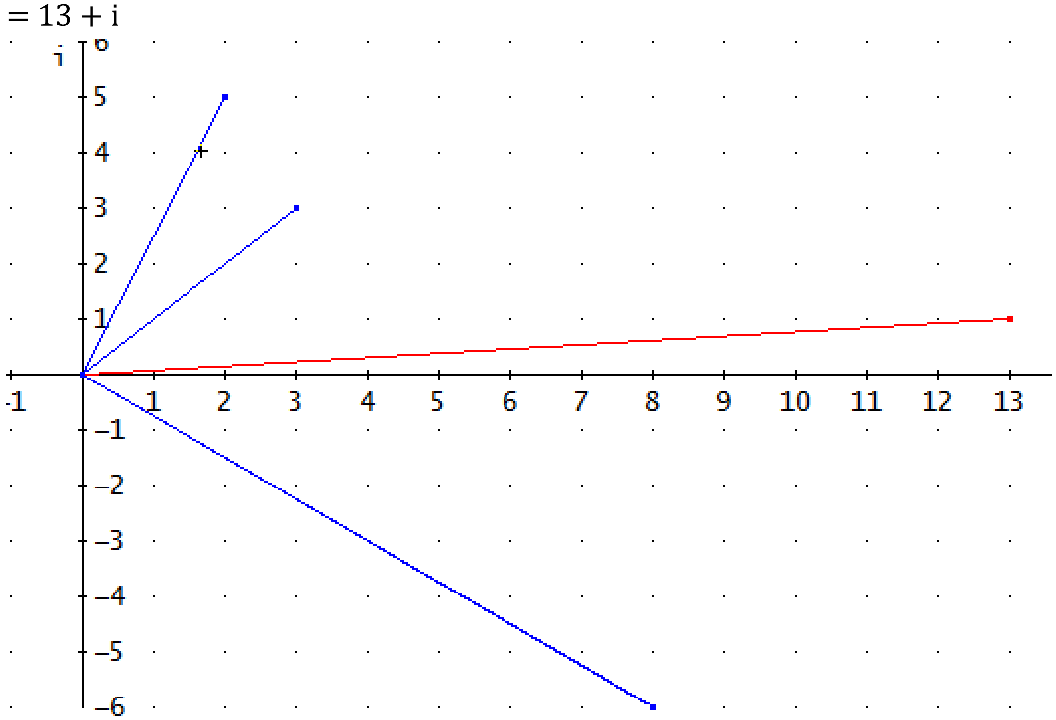


b) 3(1+2i) – 2(2-3i)

= (3+6i) - (4-6i) = (3+4) – (0) i = 7

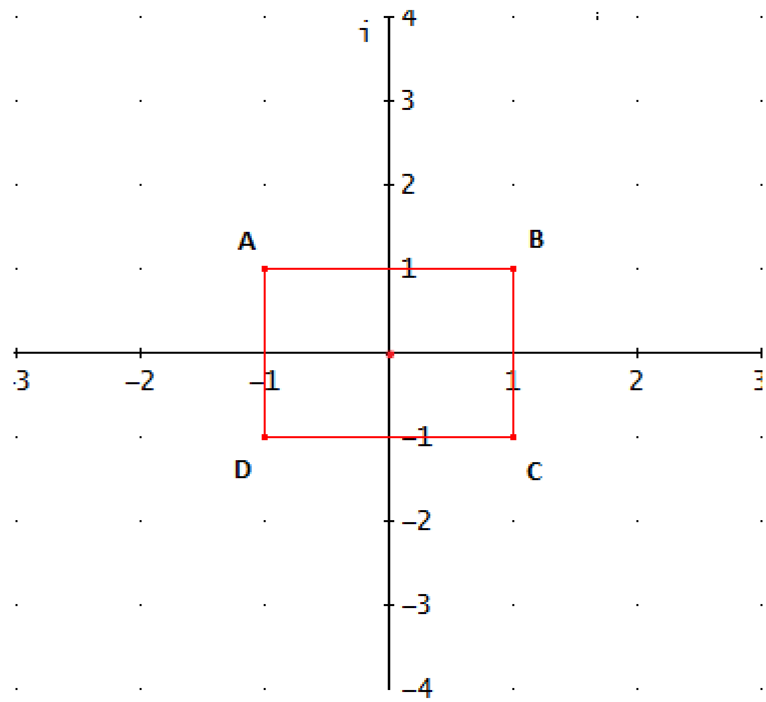


c) 3(1+i) + 2(4-3i) – (2+5i)
(3+3i) + (8-6i) – (2+5i)
= (3+8) + (3-6) i – (2+5i) = (11-6i) – (2+5i) = (11+2) - (-6-+5) i
= 13 + i



d) Sea z_1, z_2, z_3, z_4 los vectores posición de los vértices del cuadrilátero ABCD. Probar que es un paralelogramo si, y solamente si $z_1 - z_2 - z_3 + z_4 = 0$.
Si son los vectores posición de un cuadrilátero ABCD entonces
$z_1 = A = -1 + i$
$z_2 = B = 1 + i$
$z_3 = C = 1 - i$
$z_4 = D = -1 - i$

1- $z_1 - z_2 = \ -1 + 1 \ - \ 1 + 1\ i = -2i$
2- $z_3 + z_4 = \ 1 - 1 \ + \ -1 - 1\ i = -2i$
3- (-2i)-(-2i)= 0



e) Si las diagonales de un cuadrilátero se bisecan, probar que le cuadrilátero es un paralelogramo.
f) Probar que la medianas de un triángulo se interceptan en un punto.
g) Sea ABCD un cuadrilátero y E, F, G, H los puntos medios de los lados. Probar que EFGH es un paralelogramo.
h) En el paralelogramo ABCD, el punto E biseca el lado AD. Probar que el punto donde BE se intercepta con AC divide en tres partes iguales AC.

4. Fundamentos axiomáticos del sistema de números complejos
Efectuar las operaciones indicadas en forma analítica y gráficamente.

a) Emplear la definición de número complejo como pareja ordenada de números reales para probar que si el producto de dos números complejos es cero, entonces por lo menos uno de los números debe ser cero.
$n1 = x_1 + iy_1$
$n2 = x_2 + iy_2$

Comprobación:
$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

Si $n1 = 0$ entonces:
$((0) + i(0))\ x_2 + iy_2 = 0\ x_2 - 0\ y_2 + ((0)y_2 + x_2(0)) = 0$

b) Probar las leyes conmutativas con respecto a la suma y multiplicación.

- **Conmutativa**

Dados dos números complejos a + bi y c + di se tiene la igualdad:
(a + bi) + (c + di) = (c + di) + (a + bi)
Ejemplo:
(2 - 3i) + (-3 + i) = (2 - 3) + i (-3 + 1) = -1 - 2i
(-3 + i) + (2 - 3i) = (-3 + 2) + i (1 - 3) = -1 - 2i

- **Asociativa**

Dados tres complejos a + bi, c + di y e + fi, se cumple:
[(a + bi) + (c + di)] + (e + fi) = (a + bi) + [(c + di) + (e + fi)]
Ejemplo:
[(5 + 2i) + (3 - 4i)] + (-9 + 8i) = (8 - 2i) + (-9 + 8i) = -1 + 6i
(5 + 2i) + [(3 - 4i) + (-9 + 8i)] = (5 + 2i) + (-6 + 4i) = -1 + 6i

c) Probar las leyes asociativas con respecto a la suma y multiplicación.

5. Forma polar de los números complejos
Expresar cada uno de los siguientes números complejos en forma polar.

a) $5+12\sqrt{5}i$

$$z = \sqrt{(5)^2 + (12\sqrt{5})^2} = \sqrt{25 + (144)(5)} = \sqrt{25 + 720} = \sqrt{745} = 27.29$$

$$\propto = arctg\,\frac{12\sqrt{5}}{5} = 79.4°$$

$z \approx 27_{79°}$

b) -7+65i

$$z = \sqrt{(-7)^2 + (65)^2} = \sqrt{49 + 4225} = \sqrt{4274} = 65.37$$

$$\propto = arctg\,\frac{65}{-7} = 96.1°$$

$$z \approx 65_{96°}$$

c) $-\sqrt{3} - \sqrt{7}i$

d) -9i

e) Tres fuerzas como se muestra en la siguiente figura, actúan en un plano sobre un objeto colocado en O. determinar (a) gráficamente, y (b) analíticamente, que fuerza es necesaria para evitar un movimiento de un objeto.

6. Raíces de números complejos

Hallar cada una de las raíces indicadas y localizarlas gráficamente.

a) $(4\sqrt{2} - i5)^{1/3}$

$$z = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (-5)^2} = \sqrt{32^2 + 25} = \sqrt{1049} = 32.38$$

$$\propto = arctg\,\frac{-5}{4\sqrt{2}} = 138.52°$$

$$z \approx 32_{138°}$$

$$z = \sqrt[3]{32} = 3.17$$

$$\propto_0 = \frac{138° + 360°\,0}{3} = \frac{138°}{3} = 46°$$

$$\propto_1 = \frac{138° + 360°\,1}{3} = \frac{498°}{3} = 166°$$

$$\propto_2 = \frac{138° + 360°\,2}{3} = \frac{138° + 720°}{3} = \frac{858°}{3} = 286°$$

$$z_1 \approx 32_{46°}$$

$$z_2 \approx 32_{166°}$$

$$z_3 \approx 32_{286°}$$

b) $(-4 + i4)^{1/2}$

$$z = \sqrt{(-4)^2 + (4)^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 5.65$$

$$\propto = arctg\,\frac{4}{-4} = 135°$$

$$z \approx 6_{135°}$$

$z = \sqrt[3]{6} = 1.25$

$\propto_0 = \dfrac{135° + 360°\, 0}{2} = \dfrac{135°}{2} = 67°30'$

$\propto_1 = \dfrac{135° + 360°\, 1}{2} = \dfrac{495°}{2} = 247°30'$

$z_1 \approx 1.25_{67°30'}$

$z_2 \approx 1.25_{247°30'}$

c) $(2 + i2\sqrt{3})^{1/3}$

d) $(i)^{2/3}$

7. Ecuaciones polinomiales
   Resolver las siguientes ecuaciones. Obteniendo todas las raíces.

a) $5z^2 + 2z + 10 = 0$

Si z= x + iy

$z = \dfrac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(5)(10)}}{2(5)} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 200}}{10} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-200}}{10}$

$= \dfrac{-2 \pm 14.4i}{10}$, $z_1 = -0.2 + 1.44i$, $\quad z_2 = -0.2 - 1.44i$

b) Resolver $z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = 0$ $(z - 1)(z + 1)(z^2 + 2z + 4)$

$z_1 = 1$

$z_2 = -1$

$z_{3,4} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2}$

$z_3 = -1 + \dfrac{\sqrt{12}i}{2}$

$z_4 = -1 - \dfrac{\sqrt{12}i}{2}$

c) Hallar todas las raíces de $z^4 + 1 = 0$

d) Hallar dos números cuya suma es 4 y cuyo producto es 8.

FUNCIONES, LÍMITES Y CONTINUIDAD

1. Regiones del plano complejo
   Representa las siguientes regiones del plano complejo.

a) $z - 2 + 1 \ \leq$
1 b) $2z + 3 \ > 4$
c)Imz> 1 d)
Imz=1
e) $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}, \quad z \neq 0$
f) $z - 4 \ \geq \ z$

2. Imágenes de funciones complejas
   Dadas $w = f\ z\ = \frac{1-z}{1-z}$, hallar.
   a) f(i)
   b) f(1-i)

3. imagen de una región bajo una función compleja
   Un cuadrado S en el plano z tiene vértices (0,0), (1,0), (1,1), (0,1). Determina la región del plano w que es la imagen o rango de S bajo las funciones.

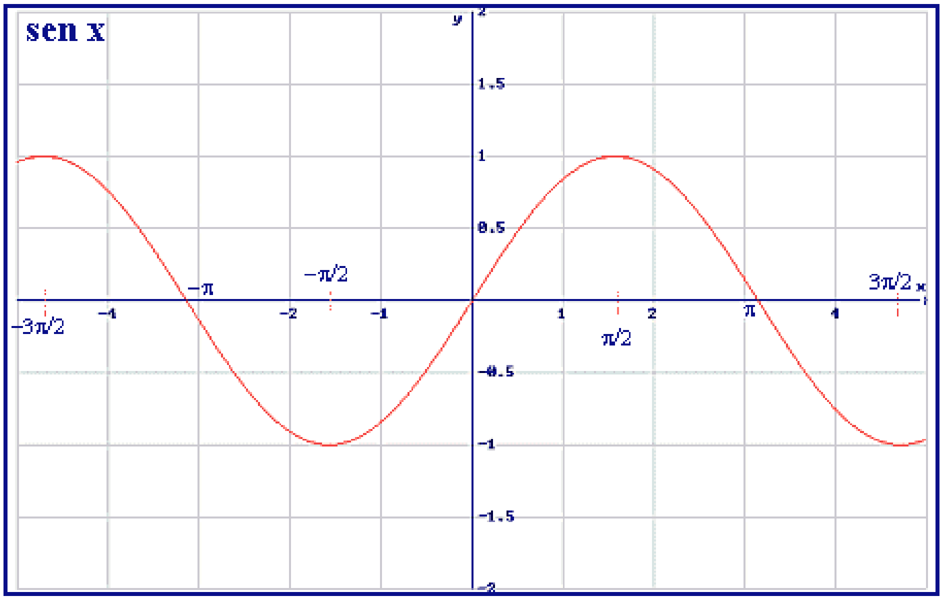
   a) $f\ z = z^2$
   b) $f\ z\ = \frac{1}{z+1}$

4. Separa cada una de las siguientes funciones en las partes real e imaginaria, es decir, *u(x,y) y v(x,y).*

a) $f\ z = 2z^2 - 3iz$
$2(x+iy)^2\ - 3i\ x + iy\ \ = 2\ x^2\ + 2ixy - y^2 \qquad - 3ix + 3y$
$2x^2 + 4ixy - 2y^2 - 3ix + 3y = 2x^2 - 2y^2 + 3y + 4xy - 3x\ i$
b) $f\ z\ = z + \frac{1}{z}$
$x + iy + \frac{1}{(x+iy)} = x + iy + x^{-1} + iy^{-1} = x + iy + x^{-1} + iy^{-1}$
$= 0$
c) $f\ z\ = \frac{1-z}{1-z}$
d) $f\ z = z^{1/2}$

fz=sen(z)

f $-$z $= \text{sen}\ -z$
$= \text{sen} - x + iy = \text{sen} -x - yi = \text{sen} -x \cos(iy) - \cos(-x)\text{sen}(iy)$
$= -\text{sen}\ x \cos iy - \cos x\ \text{sen}\ iy = -\text{sen}\ x + iy = -\text{sen}\ z$

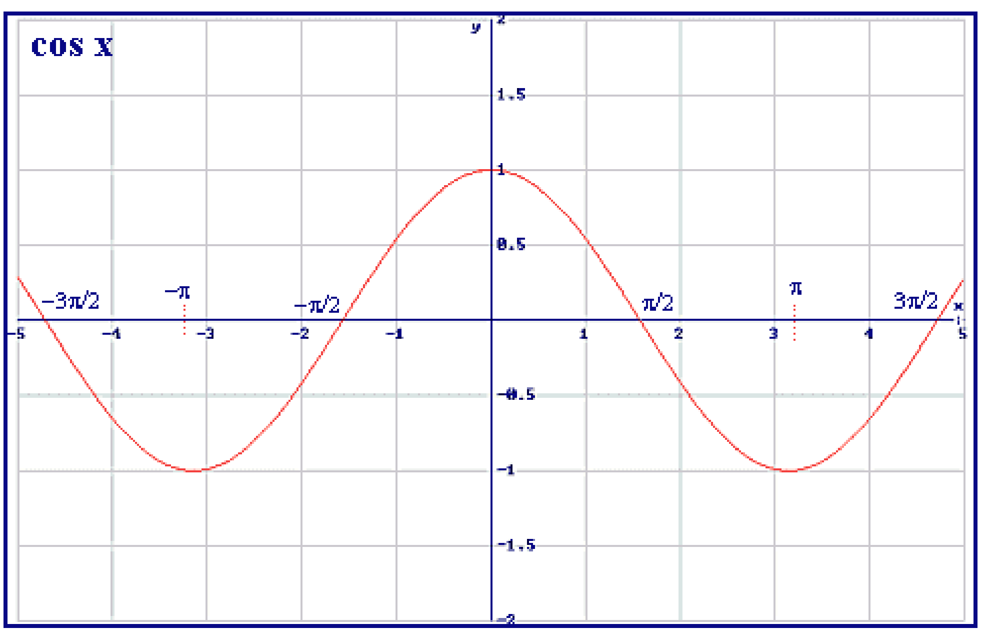


impar

$f\ \ z\ \ = \cos(z)$

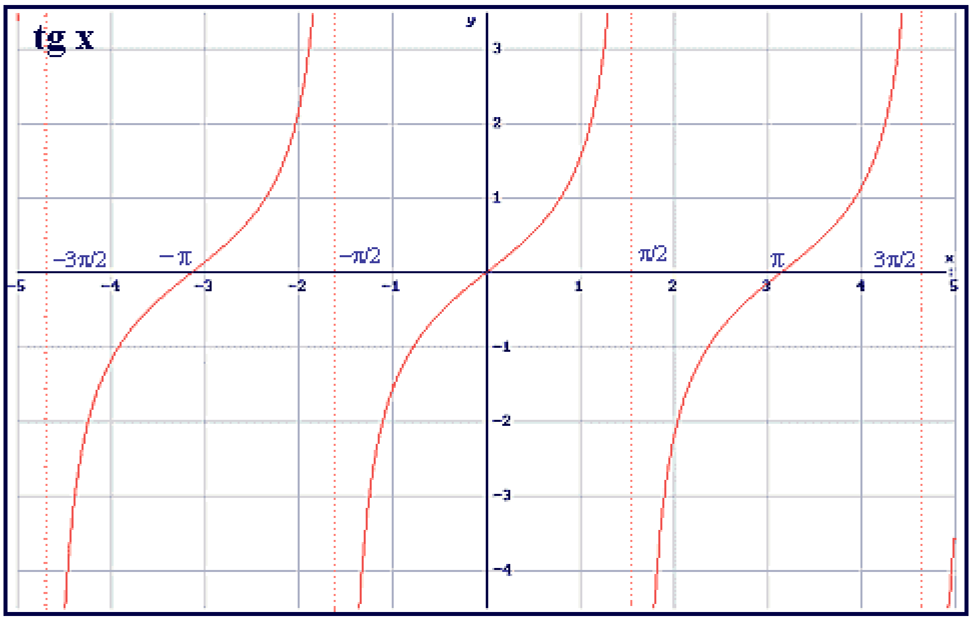
$\mathrm{f}\ \ {-\mathrm{z}}\ \ = \cos\ \ {-z}$

$$= \cos -\ x + iy$$
$$= \cos -x - yi = \cos(-x\ )\cos(\ iy) - \operatorname{sen}(-x)\ \operatorname{sen}(\ iy)$$
$$= \cos x \cos iy - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} iy = \cos x + iy = \cos z$$



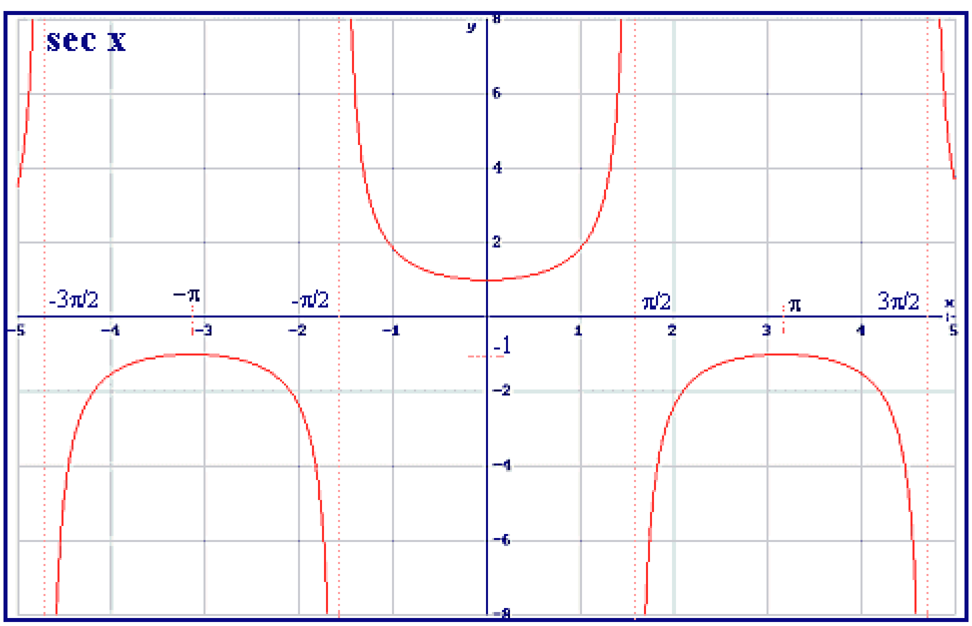
par

$$\tan(-\,z) = \frac{\text{sen}\,-z}{\cos\,-z} = \frac{-\,\text{sen}\,z}{\cos\,z} = -\,\tan z$$



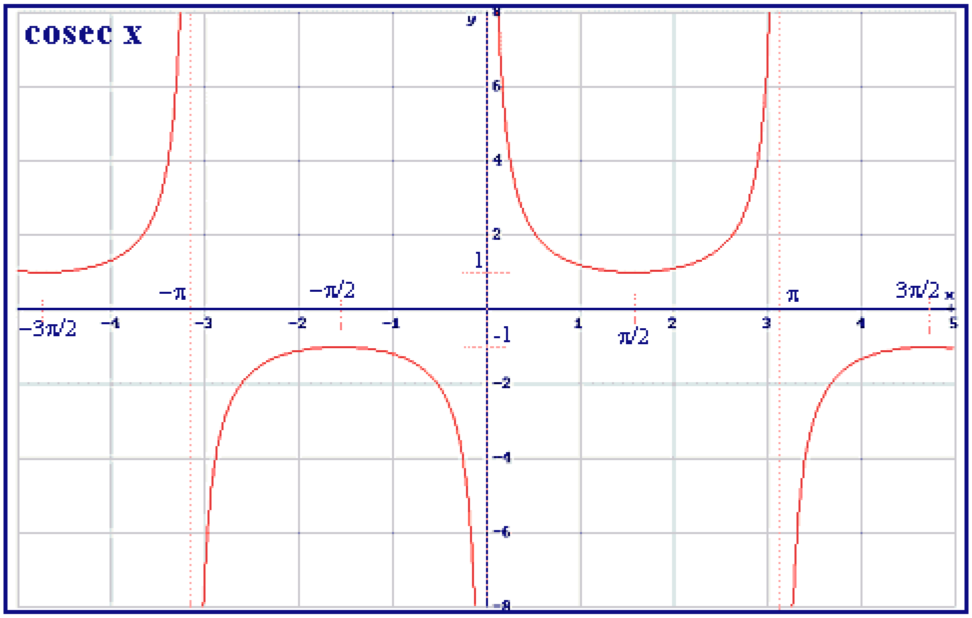
impar

$$\sec(-z) = \frac{1}{\cos - z} = \frac{1}{\cos\,z} = \sec z$$



par

$$\csc(-z) = \frac{1}{\operatorname{sen} -z} = \frac{1}{-\operatorname{sen} z} = \csc z$$



impar

Encontrar las raíces

$$z^{1/4} = (re^{-i\theta})^{1/4}$$

$$r^{1/n}[\cos \frac{\theta + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\theta + 2\pi k}{n}]$$

$$= r^{1/4}[\cos \frac{\theta + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\theta + 2\pi k}{4}]$$

K=0

$$r^{1/4}[\cos \frac{\theta}{4} + i \sin \frac{\theta}{4}]$$

K=1

$$r^{1/4}[\cos \frac{\theta + 360}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 360}{4}]$$

K=2

$r^{1\ 4}[\cos\dfrac{\theta+720}{4}+i\ \mathrm{sen}\dfrac{\theta+720}{4}]$

K=3

$r^{1\ 4}[\cos\dfrac{\theta+1080}{4}+i\ \mathrm{sen}\dfrac{\theta+1080}{4}]$

1. Definirlas funciones a) $f\ z=z^3+z+1$, b) $f\ z=(z^2-1)^3$ en la forma $f\ z=u\ x,y+iv(x,y)$ a) fz
$=z^3+z+1$

$z=(x\,iy)$

$fz=(x+iy)^3+x+iy+1=x^3+3x^2iy-3xy^2-y^3i+x+iy+1$
$=u(x^3-3xy^2+x+1)+iv(3x^2y-y^3+y)$

b) $f\ z=(z^2-1)^3=z^6-3z^4+3z^2+1$
$f\ x+iy=x+iy\ ^6-3(x+iy)^4+3(x+iy)^2-1$
$=x^6+6x^5y-15x^4y^2-20x^3y^3i-15x^2y^4-6xy^5i+y^6-3x^4$
$-12x^3y+18x^2y^2+12xy^3i-3y^4+3x^2+6xyi-3y^2-1$
$=u\ -12x^3y+18x^2y^2-3y^4+3x^2-3y^2-1+iv(12xy^3$
$+6xy$

2. Demostrar

a) $\lim_{z\to\infty}\dfrac{1}{z^3+1}=0$

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ tal\ que\ z-0<\delta\Rightarrow f(z)-L<\varepsilon$$

$$\frac{1}{z^3\quad+1}-0\ \ <\varepsilon$$

$$\Rightarrow\frac{1}{z^3\quad+1}\ <\varepsilon$$

$$\Rightarrow\frac{1}{z^3+1}<\varepsilon$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\varepsilon}<z^{3}\ +1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} - 1 < z^{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{\varepsilon} - 1} < z$$

b) $\lim_{z\to\infty} \frac{1}{(z-1)^{3}} = \infty$

$$\forall N > 0 \exists \delta > 0 \, tal \, que \, z - 1 < \delta \Rightarrow \frac{1}{(z-1)^3} < N$$

$$\frac{1}{(z-1)^3} > N$$

$$\Rightarrow \frac{1}{N} > (z-1)^{3}$$

1. Demostrar $f(z) = |z|^2$ es continua en todo el plano

   $\lim_{z\to 2} = f(z) = |z|^2 = \sqrt{x^2 + y^2 =} \; z = 2$ es continua.

2. Utilizar las formulas de la derivada para encontrar f’ z

   a) $f\ z = 3z^2 - 2z + 4$

   $f'\ z = 6z - 2$

   b) $f\ z = 1 - 4z^{2\ 3}$

   $f'\ z = 3\ 1 - 4z^{2\ 2}(-8z)$

   c) $f\ z = \frac{z-1}{2z+1}$

   $f'\ z = \frac{2z+1-2z+2}{(2z+1)^2} = \frac{3}{4z^2+4z+1} = \frac{3}{4(z^2+z)+1}$

   d) $f\ z = \frac{(1+z^2)^4}{z^2}\ ; z \neq 0$

   $$f'\ z = \frac{4\ 1 + z^{2\ 2} z^2 - 2z[(1+z^2)^4)]}{z^4} = \frac{2z(4\ 1 + z^{2\ 3} - 1)}{z^4}$$

3. Por la definición si

$$f(z) = \frac{1}{z} \quad z \neq 0$$

$$\Rightarrow f'(z) = ?$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(z + \Delta x) - f(z)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{(z+\Delta x)} - \frac{1}{z}}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{(z+\Delta x)} - \frac{1}{z}}{\Delta x} = \frac{\frac{z-z-\Delta x}{z^2+\Delta x z}}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{\Delta x(z^2 + \Delta x z)} = -\frac{1}{z^2+\Delta x z}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} -\frac{1}{z^2 + \Delta x z} = -\frac{1}{z^2}$$

4. $f(z) = xy + iy$

Tal que: $u(x,y) = xy \quad y \quad v(x,y) = y$

Verificando Cauchy Rieman:

$$\frac{du}{dx} = y \quad \neq \quad \frac{dv}{dx} = 1$$

$\therefore$ por lo que $f(z)$ no es analítica

5. $g(z) = re^{i\theta/2}$ tal que $r > 0, 0 < \emptyset < \pi$

$$g(z) = r^{1/2} e^{i\theta/2}$$

$$= r^{\frac{1}{2}}(\cos\theta + i\,sen\theta)$$

$$= r^{\frac{1}{2}}\cos\theta + r^{\frac{1}{2}} i\,sen\theta)$$

Aplicamos Cauchy Rieman

$u = r^{\frac{1}{2}} \cos\theta$ Y $v = r^{\frac{1}{2}} sen\theta$

$\frac{du}{dr} = \frac{1}{2r}\cos\frac{\theta}{2}$ $\frac{dv}{dr} = \frac{1}{2r}\text{sen}\frac{\theta}{2}$

$\frac{1}{r}\frac{du}{d\theta} = \frac{1}{2r}\cos\frac{\theta}{2}$ $-\frac{1}{r} * -\frac{dv}{d\theta} = \frac{1}{2r}\text{sen}\frac{\theta}{2}$

Vemos que: $\frac{du}{dr} = \frac{du}{d\theta}$ Y $\frac{dv}{dr} = -\frac{dv}{d\theta}$

$\therefore g(z) = re^{i\theta/2}$ es analítica en su dominio

Obtener la raíz de $f(z) = z^4 + 1$

Tenemos que

$$z^4 + 1 = (z^2 - i)(z^2 + i)$$

Las posibles raíces son:

$z^2 - i = 0$ $z = \pm\sqrt{i}$

$z^2 + i = 0$ $\Rightarrow$ $z = \pm\sqrt{-i}$

$r1 = \sqrt{i}, r2 = -\sqrt{i}, r3 = \sqrt{-i}, r4 = -\sqrt{-i}$

Separa la parte imaginaria y la real

$f(z) = z^{1/2}$

$$f(x, y) = (x, y)^{1/2}$$

En este caso se pone en su forma polar

$r^{1/2}\left(\cos\frac{\theta+2\pi k}{2} + \sin\frac{\theta+2\pi k}{2}\right)$, o simplmente $r^{1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\right)$

Resolver la integral de línea

Que va del punto (0,1) al punto (0,5) y del punto (0,5) al punto (2,5)

$$\int_{(0,1)}^{(2,5)} (3x + y)dx + (2y - x)dy$$

Por ser dos trayectorias se divide en 2 integrales que al sumarse nos da el resultado

1 parte

$$\int_{(0,1)}^{(0,5)} 3x+y\,dx+(2y-x)dy$$

y=y y x=0

dy=dy dx=0

$$\int_{(1)}^{(5)} 3x+y\,dx+(2y-x)dy= \int_{(1)}^{(5)}(2y)dy= \frac{2y^2}{2}\Big|_1^5=25-1=24$$

2 parte

$$\int_{(0,5)}^{(2,5)} 3x+y\,dx+(2y-x)dy$$

y=2 y x=x

dy=0 dx=dx

$$\int_{(0)}^{(2)} 3x+y\,dx+(2y-x)dy= \int_{(0)}^{(2)}3x+2dx= \frac{3x^2}{2}\Big|_0^2+2x\Big|_0^2=6+4=10$$

$$\rightarrow \int_{(0,1)}^{(2,5)} 3x+y\,dx+(2y-x)dy=24+10=30$$

Resolver la integral

$$\int_{(0)}^{(\infty)} e^{-zt}dt$$

$$\int_{(0)}^{(\infty)} e^{-zt}dt= \frac{1}{z}\int_{(0)}^{(\infty)} e^{-zt}dt= \frac{e^{-zt}}{z}\Big|_0^{\infty}=0-\frac{1}{z}=-\frac{1}{z}$$

Obtener la raíz de $f\ z=z^4+1$

Tenemos que

$z^4 + 1 = z^2 - i\ (z^2 + i)$ Las

posibles raíces son:

$z^2 - i = 0 \qquad \Rightarrow \quad z = \pm\ \sqrt{i}$

$z^2 + i = 0 \qquad \Rightarrow \quad z = \pm\ \sqrt{-i}$

$r1 = \sqrt{i}, r2 = -\sqrt{i}\ , r3 = \sqrt{-i}, r4 = -\sqrt{-i}$

Separa la parte imaginaria y la real

$f\ z = z^{1\ 2}$

$$f\ x, y\ = (x, y)^{1\ 2}$$

En este caso se pone en su forma polar

$r^{1\ 2} \cos\frac{\theta+2\pi k}{2} + \sin\frac{\theta+2\pi k}{2},$ o simplmente $r^{1\ 2} \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}$

BLOQUE II

2.0 FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA.

Sea S un conjunto de números complejos. Una *función f* definida sobre S es una regla que asigna a cada *z* en S un numero complejo *w.* el numero *w* se llama el valor de *f* en *z* y se denota por *f(z)*; esto es,

w = f(z)

El conjunto S se llama *el dominio de definición de f*. Supongamos que *w = u + iv* es el valor de una función *f* en *z = x + iy*, es decir,

u + iv = f(x + iy)

Cada numero real *u* y *v* dependen de las variables reales *x* e *y*, luego *f*(*z*) puede ser expresado en términos de un par de función con valores reales de las variables reales *x*e *y*:

f(z) = u(x,y) + iv(x,y)

Ejercicios.- describir el dominio de cada función

a) $f(z) = \frac{1}{z^2+1} \Rightarrow z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z = \sqrt{-1} \therefore \overline{Dom}\ f = \mathbb{C} - \{\pm i\}$

b) $f(z) = \frac{z}{z+z} \Rightarrow Dom\ f = \mathbb{C};\ z \neq 0$

c) Describir la función $f(z) = z^2 + z + 1$ en forma *f(z) = u(x,y) + iv(x,y)*

Z = (x + iy) = $(x + iy)^2 + (x + iy) + 1$

= $x^2 + 2xyi + y + x + iy + 1$

= $i(2xy + y) + (x^2 + x - y) + 1$

$\Rightarrow u(x,y) = 1 + x^2 + x - y)$

$v(x,y) = (2xy + y)$

Funciones multivariadas: es una función que puede tener mas de un valor en un número específico.

Funciones monovaluadas: es una función que cada valor de *z* le corresponde un solo valor de *w* (condominio o imagen = *w*)

Ejemplo.-

f(z) = $x^{1/2}$ = $\sqrt{x}$ ⇒ es multivariada porque tiene dos soluciones

f(z) = z^2 ⇒ es monovaluada porque tiene una solución

Funciones inversas: si *w= f(z)*⇒ consideramos a *z* una función de *w*; *z = g(w) =* f^{-1}*(w)*

Ejemplo.-*w = f(z)* ⇒f^{-1}*(w) = z o* f^{-1}*(f(z)) = Z*

$f(z) = z^2$, z = (x, iy)

$\Rightarrow f(z) = (x,iy)^2 = (x,iy)(x,iy) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_2y_1 + x_1y_2)$

Transformaciones: si *w = u + iv* donde u y v son reales y es una función univoca de $z = x, iy$ donde *x* e *y*∈*Re.*(Figura 7)

Ejemplo.-

f(x,iy)=u+iv *w = u + iv*

f(z) = w $z{=}x{,}iy$

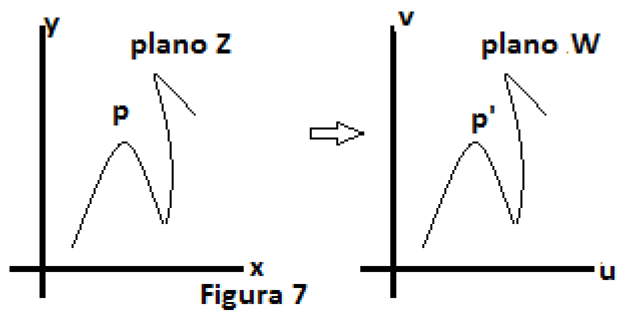


Figura 7

Igualando la parte real y la parte imaginaria equitativamente *u = u(x,y)* ∧*v = v(x,y*) entonces al punto *(x,y)* en el plano z le corresponde un punto *(u,v)* en el plano de *w*. decimos que el punto *p* se aplica o se transforma en el punto *p´* la imagen de *p*.

Una transformación: es el conjunto de puntos, donde se aplican unos puntos llamados*imágenes*, y la imagen depende del tipo de función *f* aplicado a *x*, llamada aplicación*f(x).*

Coordenadas curvilíneas: dada la transformación *w = f(z) o u = u(x,y)* ∧*v = v(x,y*) llamaremos *(x,y)* coordenadas rectangulares correspondientes a un punto *p*, en el plano*z* y a *v* las coordenadas curvilíneas de *p*.

Las curvas $u=(x,y)=c_1; v=(x,y)=c_2$ donde c_1 y $c_2 \in Re$

Curvas curvilíneas: cada par de estas curvas se intersectan en un punto, esas curvas se aplican en rectas ortogonales entre si en el plano *w*.

Funciones elementales:

a) *función polinomial:* Si una función f está definida por

$$f\ x\ = a_n x^n + a_{n1-1} x^n - 1 + a_{n-2} x^n - 2 + \cdots + a_1 + a_0$$

Donde $a_0, a_1 \ldots a_n$ son números reales $a_n \neq 0$ y n es un entero no negativo. Entonces, f se llama una *función polinomial* de grado n.

b) *Función algebraica racional*:

$$w = \frac{P(z)}{Q\ z} \quad \text{donde } P, Q \text{ son polinomios}$$

c) *Función exponencial:*

$$w = e^z = e^{x+y} = e^x \cos x + i \sin x$$

d) Función trigonométrica:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} \qquad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

$$\tan z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} \qquad \cot z = \frac{1}{\tan z}$$

e) Identidades:

$$\cos z^2 + \sin z^2 = 1 \quad 1 + \tan z^2 = \sec z^2 \quad 1 + \cot z^2 = \operatorname{scs} z^2$$

$$\sin z_1 \pm z_2 = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$$

$$\cos z_1 \pm z_2 = \cos z_1 \cos z_2 \pm \sin z_1 \sin z_2$$

$$\tan z_1 \pm z_2 = \frac{\tan z_1 + \tan z_2}{1 + \tan z_1 \tan z_2}$$

f) Función logaritmo:

Si $z = e^w \Rightarrow w = \ln z \quad w = \ln z = \ln r + i\,\theta + 2K\pi$

$K = 0, \pm 1, \pm 2,$ donde $z = re^{i\theta} = re^{i(\theta + 2K\pi)}$

g) Funciones trigonométricas inversas:

$z = \sin w \Rightarrow \sin^{-1} z$ *def.* $\sin^{-1} z = \frac{1}{i}; \ln(iz + \sqrt{1 - z^2})$

$$\cos^{-1} z = \frac{1}{i}\ln(z + \sqrt{z^2 - i}) \qquad \tan^{-1} z = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)$$

$$\csc^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\frac{1 + \sqrt{z^2 - 1}}{z} \qquad \sec^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\frac{1 + \sqrt{1 - z^2}}{z}$$

$$\cot^{-1} z = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)$$

Puntos de ramificación: Ya hemos visto una función multivaluada. Es el caso de la función compleja la raíz cúbica que tiene tres valores y un punto de ramificación z = 0. Las potencias racionales son ejemplo de funciones complejas multivaluadas.

Ahora vamos a considerar la función compleja multivaluada con dos valores y dos puntos de ramificación:

$$f\ z\ =\ \sqrt{z^2+1} = \sqrt{z-i\quad z+i}$$

Esta función tiene dos valores, si el camino es un camino cerrado, que no rodea ninguno de los puntos de ramificación, su imagen *f(z)* es un camino cerrado que vuelve a su valor inicial.

Imageninversa: la imagen inversa de un punto w es el conjunto de todos los puntos z en el dominio de la función f que tiene a w como su imagen. Imagen inversa de un punto puede contener solo un punto, muchos puntos o ninguno.(Figura 8)

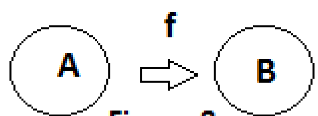


Figura 8

Traslación de una función: el mapeo (grafica) *w = z +1* es la traslación de cada punto *z* a una posición localizada una unidad.

Rotación de una función: si w = iz hace girar cada *z* diferente de cero en sentido contrario a las manecillas de reloj.

Reflexión de una función: un ángulo $\frac{\pi}{2}$ y el mapeo $w = z$ transforma cada punto *z* en su reflexión sobre el eje real.

2.1 LIMITES.

Si f es una función definida en todos los puntos en cierta vecindad de z_0 excepto, quizá z_0, el limite de f es un numero w_0 cuando z se aproxima a z_0.

$$\therefore\ lim_{z\to z_0} f(z)\ =\ w_0 |z - z_0| \Rightarrow |f(z) - w| < £$$

Ejemplo 1.- $lim_{z\to 1} \frac{iz}{2} = \frac{i}{2} = \left| \frac{iz}{2} - \frac{i}{2} \right| \frac{2iz-2i}{4} | = | \frac{i}{2}(z-i)| \Rightarrow |i|*| \frac{1}{2}* |z-1| = \frac{1}{2}|z-1| < £$

Teorema si $lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ $lim_{z\to z_0} f(z) = w_1 \Rightarrow w_0 = w_1$

Ejemplo.-

$$\lim_{z\to z_i} 2x + iy^2 = 4i$$

$\Rightarrow 2x + iy - 4i| \leq 2\ |x| + |y^2 - 4|$

= 2 |x| * | (y -2)(y -2)| = 2|x|+ |y -2||y -2|

$\Rightarrow$ 2|x|<£ ^ |y -2||y -2|<$£_2$

Pero |y + 2|= |(y - 2) +4| ≤ |y -2|+ 4 < 5

$\Rightarrow$|y -2 |< 1 ∴ |y -2| <£

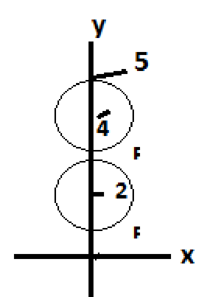


Figura 9

Gráficamente

Teorema de limite.- suponer que f(z) = u(x,y) + iv(x,y) $z_o = x_0 + iy_o$ ^ $w_o = u_0 + iv_o \Rightarrow$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \wedge \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$$

Suponer que $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ $\quad \lim_{z \to z_0} F(z) = W_0$

$\Rightarrow \lim_{z \to z_0} [f(z) + F(z)] = w_0 + W$

$\wedge \lim_{z \to z_0} [f(z) * F(z)] = w_0 * W$

$\wedge \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{F(z)} = \frac{w_0}{W_0}$; si $W_0 \neq 0$

Ejemplos.-

a) Demostrar $\lim_{z \to \infty} \frac{1}{z^3+1} = 0$

$= |\frac{1}{z^3+1} - 0| < £ = \frac{1}{|z^3+1|} < £ = \frac{1}{£} < z^3 + 1 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{£} - 1} < £$

b) Demostrar $\lim_{z \to 1} \frac{1}{(z-1)^3} = \infty$

$= |\frac{1}{(z-1)^3} - 0| < £ = \frac{1}{£} < (z-1)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{£}} - 1 < z$

Continuidad: una función f es continua en un punto z_0 si se satisfacen estas tres condiciones:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) \text{ existe} \qquad [1]$$

$$f(z_0) \text{ existe} \qquad [2]$$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \qquad [3]$$

Nótese que [3] contiene en realidad a los otros dos, pues queda implícitamente supuesta la existencia de ambos miembros de esa ecuación. La afirmación [3] dice que para cada numero positivo £ existe un numero positivo δ tal que

$$|f(z) - f(z_0)| < £ \quad si \quad |z - z_0| < \delta$$

Función acotada: cuando *f* es acotada en *Re* y adquiere un valor máximo en algún punto *R* si existe un *M+*tal que *|f(z)|≤ M.*

2.2 DERIVADAS.

Sea *f* una función cuyo dominio de definición contiene un entorno de z_0. La derivada de *f* en z_0, escrita *f*(z_0), se define por las siguientes ecuaciones

$$f'(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ Siempre que exista el límite}$$

$$f'(z) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Ejemplo.- encuentra la derivada delas siguientes funciones utilizando la definición

a) $f(z) = z^3 - 2z$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to o} \frac{(z+\Delta z)^3 - 2(z+\Delta z) - (z^3 - 2z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to o} \frac{\Delta z\,(z^2 + 3z\Delta z + \Delta z^2 - 2)}{\Delta z}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta z \to o} 3z^2 + 3z - 2 \therefore \lim_{\Delta z \to o} = 3z^2 - 2$$

b) $f(z) = \frac{1}{z}\, donde\ z \neq 0$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to o} \frac{\frac{1}{z+\Delta} - \frac{1}{z}}{\Delta z}\ \text{[illegible]}(z+\Delta) \Rightarrow f'(z) = \lim_{\Delta z \to o} \frac{\frac{z-(z+\Delta)}{2}}{\frac{(z+\Delta z)}{\Delta z}}$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to o} \frac{\frac{1}{z+\Delta} - \frac{1}{z}}{\Delta z} \Rightarrow f'(z) = \lim_{\Delta z \to o} \frac{z - z - \Delta}{\Delta(z^2 + z\Delta)}\ pero\ \Delta z \to o \therefore \lim_{\Delta z \to o} -\frac{1}{z^2}$$

Formulas de derivación

a) $\frac{d}{dz}(c) = 0; \quad c \nabla Re$

b) $\frac{d}{dz}(z) = 1$

c) $\frac{d}{dz}(c f(z)) = c f^{-1}(z)$

d) $\frac{d}{dz}(f(z) + g(z)) = f'(z) + g'(z)$

e) $\frac{d}{dz}(f(z)g(z)) = f(z)g'(z) + f'(z)g(z)$

f) $\frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}$ cuando $g(z) \neq 0$

g) $\frac{d}{dz} z^n = nz^{-1} Si\ n \nabla z^+$

h) $(g\,o\,f)(x) = g(f(x))$ [illegible]

$$(g\,o\,f)'(x) = \frac{d(g\,o\,f)}{dx} = \frac{dg(f(x))}{dx} = \frac{d}{dx} g(f(x)) = g'(f(x)) * f'(x)$$

[illegible] cadena

Ejemplo.- encuentra la derivada de las siguientes funciones

a) $f(z) = z^3 - 2z$

$$\frac{d}{dz} z^n = nz^{-1} \Rightarrow f(z) = 3z^{3-1} - 2 \therefore f'(z) = 3z^2 - 2$$

b) $f(z) = 3z^2 - 2z + 4 \Rightarrow f'(z) = 6z - 2$

c) $f\ z = (1-4z^2)^3\ pero\ u = 1-4z^2 \Rightarrow f\ z = u^3$

$$3u^2 - 8z \Rightarrow f'\ z = 3\ 1-4z^{2\ 2} - 8z$$

d) $f\ z = \frac{(z-1)}{(2z+1)} = \frac{2z+1\ 1+2(z-1)}{(2z+1)^2} \Rightarrow f'\ z = \frac{4z}{4z^4+4z+1}$

e) $f\ z = \frac{[(1+z)]^{2\ 4}}{z^2}\ donde\ z \neq 0; u = 1+z^2 \Rightarrow f\ \ z\ = \ ^z \quad \frac{^2\ 4u\ ^3 2z\ +2zu^4}{z^4}$

$$\Rightarrow f\ z = \frac{2z^3 4u^3 + 2zu^4}{z^4} \quad \Rightarrow f'\ z = \frac{2z^3 4(1+z^2)^3 + 2z(1+z^2)^4}{z^4}$$

Funciones analíticas: Si la derivada de *f(z)* esta en todo *z* de una región *R* entonces diremos *f(z)* es analítica en *R*

Criterio: *f(z)* se llama analítica en un punto z_0 si existe una vecindad $z - z_0 < \delta$ tal que cada punto de ella *f´(z)* exista.

Ecuaciones de Cauhy-Riemann: una condición necesaria es obtener un par de ecuaciones que deban satisfacer las primeras derivadas parciales de las funciones componentes *u* y *v* de una función

f(z) = u(x,y) + iv(x,y)[1]

En un punto $z_0 = (x_0, y_0)$ para que exista en el la derivada de *f*. también veremos como se puede escribir *f´(z₀)* en términos de tales derivadas parciales.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\partial v}{\partial x} \qquad [2]$$

Si las derivadas parciales en [2] son continuas en *R* entonces la ecuaciones de *Cauchy-Riemman* son condiciones suficientes para *f(z)* sea analítica en *R.*

Función armónica: si las segundas derivadas parciales de *u* y *v* con respecto a *x* e *y*, y son continuas en una región *R* entonces decimos que [2] es igual a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Se deduce que la parte real e imaginaria de una función analítica satisface la ecuación de *Laplace*

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial^2 y} = 0 \qquad ó \qquad \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} = \Delta^2 \qquad donde \quad \Delta^2 \varphi = 0$$

El operador Δ^2 es llamado usualmente el *Laplaceano*, funciones como *u(x,y), iv(x,y)* las cuales satisfacen la ecuación de Laplace en una región *R* son llamadas funciones armónicas en *R*.

Teorema.- si f(z) es analítica en una región R (que sea derivada en cualquiera de sus puntos) entonces f'(z), f´´(z),…….. son así mismos analíticas en R es decir todas las derivadas de orden superior $\exists\ en\ R$.

Regla de Riemann: Sea *f(z) y g(z)* analíticas en una región que tiene el punto z_0 y supongamos $f(z_0) = g(z_0) = 0 \implies \lim \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$ donde $g'(z) \neq 0$

Se utiliza en los indeterminados ∞, $0\ 0$, $etc.$

Ejemplo.-

a) $f(z) = z^2 - x^2 + i - 2xy f(z) = x^2$ satisface *f(z) = u(x,y) + iv(x,y)*

$$\Rightarrow (x+iy)^2 = x^2 + 2xiy - y^2 \Rightarrow u(x,y) = x^2 - y^2; iv(x,y) = 2xy$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y \frac{-\partial v}{\partial x} \quad \therefore satisface\ la\ ecuación$$

b) $f(z) = |z|^2$ distancia en valor absoluto $z = |\sqrt{x^2 + y^2}|$

$$\Rightarrow u(x,y) = x^2 + y^2; iv(x,y) = o$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 = \frac{-\partial v}{\partial x} \quad \therefore no\ cumple\ las\ ecuaciones\ de\ Cauc \quad y - Riemann$$

Teorema: si *f(z) = u(x,y) + iv(x,y)* definido en una vecindad de un punto z_0, suponer que las derivadas parciales de las funciones *u* y *v* respecto a *x* ^*y*, existe una vecindad y son continuas en (x_0, y_0) en estas condiciones si las derivadas parciales satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en (x_0, y_0) la derivada existe

Ejemplo.- $f(z) = e^{x+iy} = f(z) = e^x * e^{iy}$ recordar que: $e^x \cos y + i \sin y$

$$\Rightarrow u(x,y) = e^x \cos y; \qquad iv(x,y) = e^x \sin y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^x - \sin y = \frac{-\partial v}{\partial x}$$

2.3 ECUACIONES DE COUCHI-RIEMMAN EN FORMA POLAR.

Sea $x = r\cos\theta \wedge y = r sen\,\theta$ supongamos que *w=f(z)*

$z = x + yi => re^{i\theta} = z$ si $w = v + iv$ se expresa en términos de x, y en términos de r, θ. Las ecuaciones de *Cauchy-Riemman* en forma polar se escriben de la siguiente forma

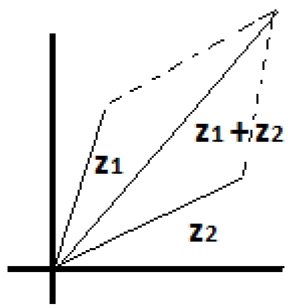
$$u_r(R_0,\theta_0) = \frac{1}{r_0} V(r_0,\theta_0)$$

$$\frac{1}{r_0} u(r_0,\theta_0) = -V_r(r_0,\theta_0)$$

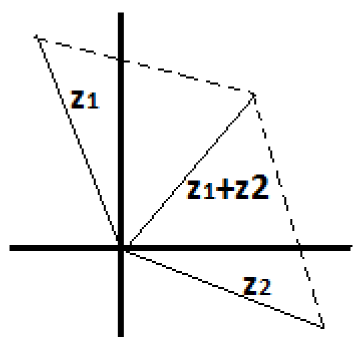
*EJERCICIOS DEL BLOQUE

1) Representa gráficamente lo siguiente

a) $z_1 = 3+4i$ $\qquad z_2 = 5+2i$ $\qquad z_1+z_2$



b) $z_1 = -2+5i$ $\qquad z_2 = 6-2i$ $\qquad z_1+z_2$



2) Resuelve las siguientes operaciones

a) $\frac{35+5i}{6-64i} - \frac{250}{1+3i}$

$$\frac{35+5i}{6-64i} - \frac{250}{1+3i} = \frac{1+3i \quad 35+5i \quad + \quad 6-64i \;\; 250}{6-64i \quad 1+3i} = \frac{-15890i+1520}{6-64i \quad 1+3i}$$

$$= \frac{1520-15890i}{198-46i}$$

b) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 - 2\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 - 2\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 = \frac{(1+i)^2 - 2(1-i)^4}{(1-i)^2\,(1+i)^2} = (1+i)^2 - 2\,(1-i)^2 = 2i - 4$$

3) Llevar los números a su forma polar

a) Z = 5 + 12 $\sqrt{5}i$

$$r = |5 + 12\sqrt{5}i| = \sqrt{5^2 + 12^2\,(\sqrt{5})^2} = r = \sqrt{25 + 720} = r = \sqrt{745} = r = 4\sqrt{40}$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{12\sqrt{5}}{5} = \theta = 79.44 \approx 80°$$

$$\Rightarrow 5 + 12\sqrt{5}i = r(\cos\theta + isen\theta) \therefore 5 + 12\sqrt{5}i = 4\sqrt{40}(\cos 80 + isen80)$$

b) Z = -9i

$$r = |-9i| = |-9| = \sqrt{-9^2} = \sqrt{181} \Rightarrow r = 9 \Rightarrow -9\mathrm{i} = r(\cos\theta + isen\theta)$$

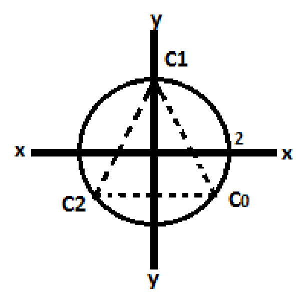
$$pero\ \theta = 270° \Rightarrow 9\mathrm{i} = 9(\cos 270° + isen270°)$$

4) Hallar los valores de las tres raíces cubicas de $(-8i)^{1/3}$

$$-8i = 8exp\left[i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right] \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots)$$

Para ver las raíces tenemos

$$C_K = 2exp\left[i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right] \qquad k = 0, 1, 2 \ldots$$



Y en coordenadas rectangulares

$$c_o = 2exp\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(cos\frac{\pi}{6} - isen\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i$$

Y análogamente encontramos $c_1 = 2i$ y $c_2 = -\sqrt{3} - i$ estas raíces son los vértices de un triangulo equilátero inscrito en el circulo de radio 2 centrado en el origen y la raíz principal es $c_0 = -\sqrt{3} - i$

5) Probar que f(z)= iz/2 en el disco abierto |z|< 1 de $\lim_{z\to 1} f(z) = \frac{i}{2}$

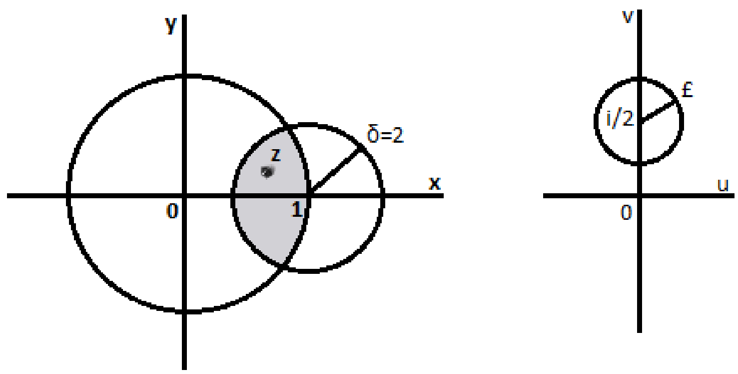
Notar que el punto z=1 esta en la frontera del dominio de la definición, entonces z esta en la región |z| < 1

$$entonces\ \left|f(z) - \frac{i}{2}\right| = \left|\frac{iz}{2} - \frac{i}{2}\right| = \frac{|z-1|}{2}$$

Por consiguiente, para toda z y todo numero positivo ∇

$\left|f(z) - \frac{i}{2}\right| < ∇$ siempre que 0 < |z -1| < 2 ∇

$\Rightarrow$ satisface los puntos de la region $z < 1$ cuando δ es igual a2
∇ o cualquier numero positivo menor



6) Calcula el siguiente limite $\lim_{z\to\infty} \frac{2z+i}{z+i}$

Ya que $\lim_{z\to\infty} \frac{(2/z)+i}{(1/z)+1} = \lim_{z\to\infty} \frac{2z+i}{1+z} = 2$

$$\Rightarrow \lim_{z\to\infty} f\, z = \infty \; si\, y\, solo\, si \lim_{z\to 0} \frac{1}{f(1/z)} = 0$$

7) La siguiente función es continua?

$$f\; z \;= xy^2 + i(2x - y)$$

$f(z)$ es continua en todo el plano complejo porque las funciones componentes son polinomios en x e y, y por lo tanto continuas en todo punto (x,y).

8) Encuentra la siguiente derivada, en cualquier punto z

$f\; z = z^2$ Utilizando la definición tenemos

$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}$ Despejando y haciendo operaciones tenemos que

$\lim_{\Delta z\to 0} 2z + \Delta z = 2z$ ya que $2z + \Delta z$ es un polinomio en Δz. ∴ f'(z)= 2z

INTEGRALES COMPLEJAS **BLOQUE III**

Las integrales son muy importantes en el estudio de las funciones de una variable compleja.

3.1 INTEGRALES COMPLEJAS.

Una función de valor complejo F de una variable real "t" se escribe de la forma F(t)=u(t) +iv(t)

"u" y "v" son funciones reales de "t" continuas por tramos definidos por un intervalo acotado cerrado a≤t≤b. F es continua en tramos y se define la integral definida de F en el intervalo [a, b] en termino de dos intervalos definidos del tipo:

$$\int_a^b F(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt$$

Las condiciones sobre las funciones U y V son suficientes para garantizar la existencia de la integral, una integral impropia de f en un intervalo no acotado se define de igual modo y existe cuando las integrales impropias de "u" y de "v" convergen.

A partir de $\int_a^b F(t)\,dt = \int_a^b U(t)\,dt + i\int_a^b V(t)\,dt$ tenemos que $Re\int_a^b F(t)\,dt = \int_a^b Re[F(t)]\,dt$

Además para cada constante compleja $\sigma = C_1 + C_2$

$$\int_a^b \sigma F(t)\,dt = \int_a^b (C_1u - C_2v)\,dt + i\int_a^b (C_2u + C_1v)\,dt = (C_1 + C_2)\int_a^b u\,dt + i\int_a^b v\,dt$$

$$\int_a^b \sigma F(t)\,dt = \sigma\int_a^b F(t)\,dt$$

Otra forma de definir $\int_a^b F(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt$ es en forma polar $\sigma_0 \to$ modulo

$\Theta_0 \to$ argumento

$$\sigma_0 e^{i\Theta_0} = \int_a^b F(t)\,dt$$

Para resolver esto

$$\sigma_0 = \int_a^b e^{-i\Theta_0} F(t)\,dt$$

Pero

Re($e^{i\Theta}F$)≤|$e^{i\Theta_0}F$|=|$e^{-i\Theta}$||F|=|F| =>$\sigma_0 \leq \int_a^b |F(t)|\,dt$

Siempre que a < b es decir

$$\left|\int_a^b F(t)\,dt\right| \leq \int_a^b F(t)\,dt$$

También se representa la desigualdad

$$\left|\int_a^\infty F(t)\,dt\right| \leq \int_a^\infty F(t)\,dt$$

Contornos de un arco

"C" es un conjunto de puntos z(x, y) talque x=x (t)‸ y=y (t) son funciones continuas con parámetro real (t) en el plano x, y.

Escribimos los puntos de "C" por la ecuación z=z (t) = x (t)+ i y (t), "z" es continua porque es la suma de dos funciones continuas.

Arco simple

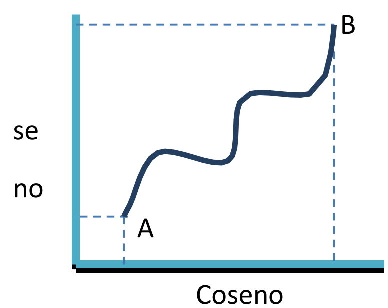
Un arco es simple si y solo si su función aplicadas t_1 y t_2 son diferentes $z\,t_1 \neq z\,t_2 \rightarrow t_1 \neq t_2$.

Cuando es arco simple, excepto el hecho de que z(b)= z(a) se dice que "c" es una curva siempre cerrada.

INTEGRAL COMPLEJA

L.- es una curva suave en D

Empieza en A y termina en B



X(t)=x(t)+ iy(t) α≤t≤β

W=f(z)= u+iv

$$\int_L f(z)dz = \int_L (u+iv)(dx+idy) = \int_L (udx - vdy) + i\int_L (vdx+udy)$$

Se separa la parte real y la imaginaria

$$\int_{\alpha}^{\beta}[u\,x\,t\,,y\,t\;\;x^{l}\;t\;-v\,x\,t\,,y\,t\;\;y^{l}\;t\,]dt$$

$$+\,i\int_{\alpha}^{\beta}[v\,x\,t\,,y\,t\,x^{l}\,t-u\,x\,t\,,y\,t\,y^{l}\,t\;\;]dt$$

Cuando derivamos Z

$$z^{l}\;t\;\;=x^{l}\;t+y^{l}\;t\qquad\qquad\wedge\qquad u\,x\,t\,,y\,t\;\;=u\,z\,t$$

Entonces aplicamos la regla de la cadena

$$\int_{L}f\,z\,dz=\int_{\alpha}^{\beta}f\,z\,t*z^{l}\,t\,dt$$

Cuando es a trozos

$$\int f\,z\,dz=\sum_{K=1}^{n}\int_{LK}f\,z\,dz$$

$$\int_{L}f\;\;z\;\;dz=-\int_{-L}f(z)dz$$

Propiedad α,β constante

$$2.-\int\alpha f\;z+\beta\varphi\;z\;dz\gg\alpha\int_{L}f\;z\;dz+\beta\int_{L}\varphi\;z\;dz$$

$$3.-f\;\;z\;\;\;\leq\mu\qquad para\;z\epsilon L=>|\int f\,z\,dz|\leq\mu l$$

Con l longitud de L

Ejemplo

$$\int_{L}\frac{dz}{z-z_{0}}=$$

$z-z_{0}=\delta e^{it}\qquad\qquad 0\leq t\leq 2\pi$

$z=\delta e^{it}+z_{0}$

$dz=i\delta e^{it}dt$

$$\int_0^{2\pi} \frac{i\delta e^{it}}{\delta e^{it}}\, dt = i \int_0^{2\pi} \frac{\delta e^{it}}{\delta e^{it}}\, dt = i \int_0^{2\pi} dt = i2\pi$$

Donde la L es la circunferencia que tiene por centro el punto z_0 esta orientada en sentido contrario a las agujas del reloj.

$$\Rightarrow \int_L (z-z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} (\delta e^{it})^n$$

$$= \int_0^{2\pi} i\delta^{n+1} e^{i(n+1)t} dt = i\delta^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} = i\delta^{n+1} \frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \Big|_0^{2\pi}$$

$$e^{i(n+1)t} = \cos (n+1) 2\pi + i \sin (n+1) 2\pi$$

3.2 TEOREMA DE CAUCHY.

Si la función f(z) es analítica sobre una región D simplemente conexa entonces la integral de f(z) tomada a lo largo de cualquier contorno cerrado suave a trozos σ pertenece a D es igual a cero.

Conexo a la región D se denomina simplemente conexa si toda curva cerrada continua adjunta trozada en D limita cierta región G, pertenece por completo a D

σ -> contorno suave a trozos

a) $\int_\sigma z^n\, dz = 0 \quad n = 0,1,2, \dots .$
b) $\int_\sigma e^z\, dz = 0$
c) $\int_\sigma a^z dz = 0 \; (a > 0)$
d) $\int_\sigma \sin z\, dz = 0$ e)
$\int_\sigma \cos z\, dz = 0$ f)
$\int_\sigma \sinh z\, dz = 0$
g) $\int_\sigma \cosh z\, dz = 0$

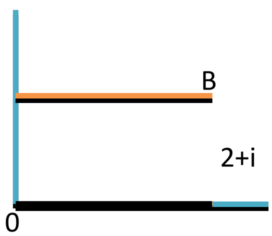
Funciones subintegradas son analíticas sobre el plano z, estas tienen las derivadas continuas en todos los puntos z del plano complejo.

Supongamos que una región D de un plano complejo esta limitada por un contorno suave a trozos compuestos los puntos de D queda a la izquierda ent. Para la función f(z) analítica sobre D tiene lugar la igualdad $\int_\sigma f(z)\, dz = 0$,(área $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$)

Teorema: Supongamos que una región D esa limitada por el contorno exterior σ orientado en el sentido contrario de las manecillas del reloj y por los contornos interior $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n$ orientados en el mismo sentido y supongamos que sobre D esta dada la función analítica f(z).

$$\int_{\sigma} f(z)\,dz = \sum_{K=1}^{n} \int_{IK} f(z)\,dz$$

Encontrar el valor de la integral C_1el segmento de la recta que une a 0, B que va de z=0 hasta z=2+i



$I_T = \int_{C_1} z^2 dz$

z=2+i

z=x+yi

z=2x+iy => y=mx + b $=> y = \frac{1}{2}x => 2y = x$

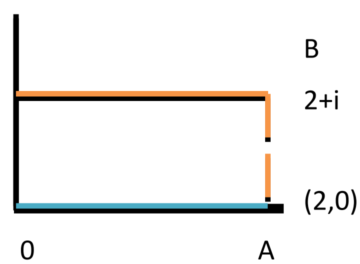
$z^2 = 4y^2 + 4iy^2 - y^2 \qquad => z^2 = 3y^2 + 4iy^2$

$dz = 2dy + idy = dy(2+i)$

$$\int_0^1 (3y^2 + 4iy^2)(2+i)\,dy = (2+i)\int_0^1 (3y^2 + 4iy^2)\,dy = (2+i)\left[\int_0^1 3y^2\,dy + i\int_0^1 4y^2\,dy\right]$$

$$= (2+i)\left(\frac{3y^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{i4y^3}{3}\Big|_0^1\right) = \left(1+\frac{i4}{3}\right)(2+i) = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i$$

Después se toma la trayectoria de integración C_2 en el contorno 0, A, B



$$\int_{C_2} z^2 dz = \int_{0A} z^2 dz + \int_{AB} z^2 dz$$

1.− $z = x + yi$ => $z(x) = x \qquad 0 \le x \le 2$

2.−$z = x + yi$ => $z = 2 + yi$ => $dz = idy$

$\int_0^2 x^2\,dx + \int_0^1 (2+iy)^2 i\,dy \qquad u = 2 + yi$

$du = idy$

$$\int_0^2 x^2 dx + \int_0^1 u^2 du = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + \frac{(2+yi)^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} + \frac{(2+i)^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{(2+i)^3}{3} = \frac{2+11i}{3}$$

Nota: como la región 1=2 por lo tanto va a ser igual a un contorno cerrado

El contorno 0, A, B

$$z(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le 2 \\ 2 + i(t-2) & 2 \le t \le 3 \end{cases}$$

Sea f(z) una función analítica en una región cerrada simplemente conexa D provisto de una frontera suave a trozos L entonces se cumple la formula de cauchy.

$$f\ z_0 = \frac{1!}{2\pi i} \int_L \frac{f\ z\, dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad \bar{D} = D \cup \delta D$$

Nota: conexa región

La región Dse denomina simplemente conexa si toda curva cerrada continua autodisjuntatrazada en D, limita cierta región "g", perteneciente por completo D.

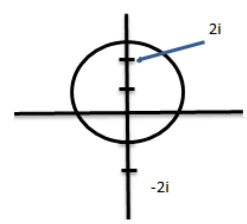
Donde z_0 es un punto cualquiera dentro del contorno L y la integración se realiza en el sentido positivo

3.3 INTEGRACIÓN DEL TIPO CAUCHY.

La expresión $f\ z_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f\ z\ dz}{z - z_0}$ donde f(z) es la función analítica en la región cerrada D limitada por el contorno L orientada positivamente se llama la integral de cauchy si z_0 dentro de Lla integralseráiguala f(z_0).

Si z_0 esta fuera del L, z_0 fuera de L, $\frac{f\ z}{z - z_0}$ sobre D entonces la integral de cauchy será igual a cero.

Encontrar el valor de la integral de G(z) alrededor del contorno cerrado simple |z-i|=2 en el sentido positivo



$$g\ z = \frac{1}{z^2 + 4}$$

$$\frac{1}{(z + 2i)(z - 2i)}$$

$z_0 = 2i$

$$g\ z = \frac{1}{z + 2i}$$

$$\frac{g(z)}{z - 2i}$$

$$\frac{\frac{1}{(z+2i)(z-2i)}}{z - 2i} = \frac{\frac{1}{z+2i}}{z - 2i}$$

-z_0 dentro de L, las [illegible]

-z_0 fuera de L, $\frac{f(z)}{z - z_0}$

$$g(z_0)\, 2\pi i = \oint \frac{g(z)}{z-z_0} dz => \oint \frac{\frac{1}{z+2i}}{z-2i} dz = \frac{1}{4} 2\pi i => \oint \frac{1}{z^2+4} dz = 2g(2i) = \frac{1}{2i+2i} = \frac{\pi}{4i} \qquad \frac{1}{} \qquad \frac{1}{}$$

3.4 TEOREMA DE GREEN.

Cumple la igualdad

$$u\,dx - v\,dy = \iint_R (x+y)\,dx\,dy$$

Si una función es analítica en cualquier parte del dominio simplemente conexo entonces todo contorno cerrado C dentro de D entonces se cumple lo siguiente.

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

El contorno simplemente cerrado se puede sustituir por un contorno arbitrario cerrado C, que no necesariamente simple

Se denota a C como un contorno cerrado simple y a C_j como un numero finito de contornos cerrados simples interiores a C. y cada C_j no tiene puntas en común o intersección con los demás entonces $\int_C f(z)\,dz = 0$ se denota por la frontera orientada en la dirección positiva

3.5 DERIVADAS DE FUNCIONES ANALÍTICAS.

Si una función es analítica en un punto sus derivadas de todos los ordenes existen en ese punto y son también analíticas allí.

Teorema.- si una función es analítica en un punto entonces las derivadas de todas las ordenes son también funciones analíticas en ese punto.

Entonces la integral de cauchy puede verse de la siguiente forma.

$$f^{n}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \quad n = 1,2, \dots ,$$

3.6 TEOREMA DE MORERA

La derivada de la función $f(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)\,ds$ existe en cada punto de cualquier dominio simplemente conexo D en el cual f(z) es analítica $f^{l}(z) = f(z)$ estamos derivando la integral.

Teorema: Si una función f es continua en un dominio simplemente conexo "D" y si para cada contorno cerrado simple C que se encuentra en D y tenemos $\int_C f\ z\ dz = 0$ entonces "f" es analítica en todo D.

3.7 MÓDULOS MÁXIMOS DE FUNCIONES

F es una función analítica y no constante en un disco abierto $z - z_0 < r$ con centro en z_0 si C es cualquiera de los círculos $z - z_0 < r\ y\ 0 < r < r_0$, cumple con la integral de cauchy $f\ z_0 = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f\ z\ dz}{z - z_0}$ por la trayectoria C y una representación paramétrica de la misma $z\theta = z_0 + re^{i\theta}$ por lo tanto $f\ z_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} (z_0 + re^{i\theta})d\theta$

3.8 TEOREMA DE LIOUVILLE

Si f es entero y acotada para todos los valores de z en l plano complejo enero f(z) es constante.

San P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial x}$ uniformes y continuos en una región siplemente conexa R cuyo contorno s una curva simple cerrada C entones.

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Comprobar el teorema de Green en el plano para $\int_C 2xy - x^2\ dx + x + y^2\ dy$

Siendo C una curva cerrada que limita la región $y = x^2 \wedge x = y^2$

Con y=x^2

$=>\ 2x\ x^2 - x^2\ dx + x + x^{2\ 2}\ dy$

$=>\ 2x^3 - x^2\ dx +\ x + x^4\ 2xdx$

$=>\ \int_0^1 2x^3 - x^2\ dx + \int_0^1 x + x^4\ 2xdx$

$=> \frac{2x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^6}{6}\Big|_0^1 = \frac{2}{4} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{6} = \frac{3+2+2}{6} = \frac{7}{6}$

$\int_C 2xy - x^2\ dx + x + y^2\ dy$ $\qquad x = y^2 => dx = 2ydy$

$\int_0^1 2y\ y^2\ - y^{2\ 2}\ 2ydy + \int_0^1 y^2 + y^2\ dy$

$=> \int_0^1 2y^3 - y^4 \quad 2ydy + \int_0 2y^2dy => \int_0^1 (4y^4 - 2y^5)dy + \int_0 2y^2\,dy$

$=> \frac{4y^5}{5} - \frac{2y}{6} \Big|_0^1 + \frac{2y^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{4}{5} - \frac{2}{6} + \frac{2}{3} = \frac{12+5}{15} = \frac{17}{15}$

$$\frac{7}{6} - \frac{17}{15} = \frac{35-34}{30} = \frac{1}{30}$$

3.9 TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA

Un polinomio cualquiera $P\,z = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$ con $a_i \neq 0, n \geq 1$ tiene al menos un cero es decir existe un punto z_0 tal que $P\ z_0 = 0$

$$z^2 + 1 = 0 => \ z+1 \ ^2 + 1 = 0 => \ z+1 \ \ z-1 \ = 0$$

El valor de $z_0 = \pm i$

Emplear el teorema de Green $y^2dx + 4xydy$ donde C es la cuerva cerrada que consta del arco de la paravola $y = x^2$ desde el origen hasta el punto (2,4) y el segmento rectilíneo de 2,4 al origen donde esta es le región con la frontera C.

3.10 SERIES DE POTENCIA

Sea f una función analítica en un disco abierto $z - z_0 < R$, centrado en z_0 y de radio $R > 0$. Entonces, en todo punto z de ese disco f(z) admite la representación en serie

$$f\,z = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (z - z_0)^k \qquad [1]$$

La serie *1+ converge uniformemente sobre el circulo |z|≤ P es igual |z-0|≤ P si sacamos su modulo. F(z) tiene sobre el circulo la derivada continua $f^{(n)}$, se puede calcular derivando la serie [1] termino a termino, las suma de las series de potencia es na función analítica en el circulo de su convergencia los números $C_k = \frac{f^{k}(z_0)}{k!}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots \ldots .)$ con esto se demuestra que la serie de potencia es la serie de Taylor, la formula se puede sustituir por:

$$C_k = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz \qquad donde \qquad (k = 0,1,2,\ldots\ldots)$$

Donde L es el contorno arbitrario orientado en sentido positivo
Teorema: la función analítica f(z) en el circulo se desarrolla en una serie de potencias convergentes hacia ella según las potencias $z - z_0$

***EJERCICIOS DEL BLOQUE**

1) Determinar el dominio de analiticidad de la función f y aplicar el teorema de Cauchy-Grousart para demostrar que

$\int f(z)\,dz = o$ Cuando el contorno simple C es la circunferencia |z| = 1 y cuando $f\ z\ = \frac{3z}{z-3}$

La función es derivable en todos los puntos ≠z=3 ∴ el contorno y la región e analítica por teorema de Cauchy-Goursat f es analítica en toda la región

2) Evaluar cada una de las integrales siguientes donde la trayectoria de integrales es un contorno arbitrario ante los limites que se indican

a) $\int_0^{\pi} e^{(1+i)z}\ dz$

$$\Rightarrow \int_o^{\pi} e^z \cos z\, dz + i \int_o^{\pi} e^z \operatorname{sen} z\, dz \qquad = \frac{-1+e^z}{2} + \frac{(1+e^z)}{2}$$

b) $\int_1^3 (z-2)^3\, dz$

$$\Rightarrow \int_1^3 (z^3 - 6z^2 + 12z - 8)\, dz = \frac{z^4}{4} - 2z^3 + 6z^2 - 8z\Big|_1^3$$

$$\Rightarrow \frac{3^4}{4} - 2(3)^3 + 6(3)^2 - 8(3) - \frac{1}{4} - 2 + 6 - 8$$

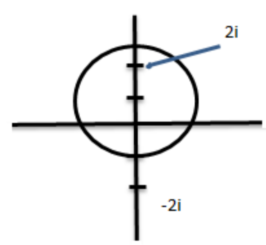
$$\Rightarrow \frac{81}{4} - 24 + 54 - 54 - 24 - \frac{1}{4} - \frac{16}{4} = 0$$

3) Encontrar el valor de la integral de g(z) alrededor del contorno cerrado simple |z - i|=2 en el sentido positivo cuando

a) $g\ z\ = \frac{1}{z^2+4}$

tenemos $\frac{1}{z-i}\ \frac{1}{z+i} = \ z+2i\ = \frac{\frac{1}{z+2i}}{z-2i}$

$$g\ z\ 2\pi i = \frac{g\ z}{z - z_0} \Rightarrow g\ 2i = \frac{1}{4i} = \int \frac{\frac{1}{z+2i}}{z-2i}\, dz$$



$$= \frac{1}{4i} 2\pi$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{z^2+4}\, dz = \frac{\pi}{2}$$

b) $g\ z\ = \frac{1}{(z^2+4)^2}$

$$\text{usando Cauchy} f\ z_0 = \frac{1!}{2\pi i} \int \frac{f\,z\,dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

nota: utilizamos la misma grafica del ejercicio 3) a.

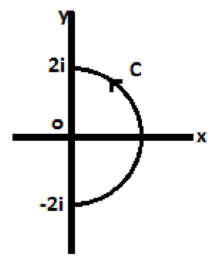
$$= \frac{1}{z+i \quad z-i} = \frac{1}{(z-i)^2 \, z+i^{\,2}} \quad def \quad z \; = \; \frac{1}{\frac{(z+i)^2}{(z-i)^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{(-2i+2i)^3} = \frac{1}{32i} \Rightarrow \frac{1}{32i} = \frac{1}{2\pi i} \frac{\frac{1}{(z-1)^2}}{(z-2i)^2} = \frac{2\pi i}{32i} = \frac{\pi}{16}$$

4) Hallar el valor de $\int_c z\,dz$ cuando C es la mitad de la derecha del circulo |z |= 2, desde z= -2i a z=2i

$$z = 2e^{i\theta} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Entonces $e^{i\theta} = e^{-i\theta}$ $y \frac{d}{d\theta} = ie^{i\theta} \Rightarrow I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2e^{-i\theta} 2e^{i\theta}\, d\theta$



Notar que cuando un punto z esta sobre el circulo |z|= 2,

se sigue que

$zz = 4$ $o\ sea, z = \frac{4}{z}$ luego el resultado I= $4\pi i$ se puede reformular

$$\int_C \frac{dz}{z} = \pi i$$

5) Sea C el arco semicircular $z = 3e^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ desde el punto z = 3 hasta z = -3. Aunque la rama de la función multivaluada $z^{1/2}$ no esta definida en el punto inicial z = 3 del contorno C, la integral

$$I = \int_C z^{1/2} dz$$

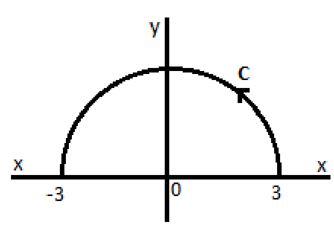
De la rama existente, sin embargo, porque el integrado es continuo a trozos sobre C. observamos que cuando $z\ \theta = 3e^{i\theta}$ los limites de la derecha de las componentes reales e imaginarias

$$f\ z\ \theta \;=\; \overline{3e^{i\theta/2}} = \overline{3} \cos \frac{\theta}{\pi} + i \; \overline{3} \operatorname{sen} \frac{\theta}{\pi} \qquad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

En $\theta = 0$ son $\overline{3}$ y 0, respectivamente. Por tanto, $f\ z\ \theta$ es continua en el intervalo cerrado $(0 \leq \theta \leq \pi)$ si se define su valor en $\theta = 0$ como $\overline{3}$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \overline{3}\, e^{\frac{i\theta}{2}}\, 3e^{i\theta} d\theta = 3\,\overline{3}i \int_0^{\pi} e^{\frac{i\theta 3}{2}} d\theta$$

$$\int_0^{\pi} e^{\frac{i\theta 3}{2}} d\theta = \frac{2}{3i} e^{\frac{i\theta 3}{2}} \Big]_0^{\pi} = -\frac{2}{3i}(1+i)$$



Y finalmente $I = -2\,\overline{3}(1+i)$

6) Sea C el mismo contorno $yz^{1/2}$ la misma rama de la función raíz cuadrada del ejercicio 5. Sin conocer exactamente el valor de la integral, se puede probar fácilmente que

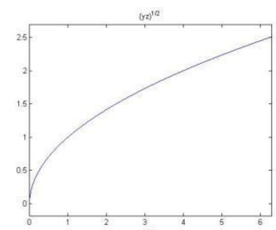
$$\left|\int_C \frac{z^{1/2}}{z^2+1}\,dz\right| \leq \frac{3\sqrt{3}\pi}{8}$$

Porque cuando z es un punto de C, |z|= 3; y se sigue que

$$|z^{1/2}| = \left|\sqrt{3}e^{\frac{i\theta}{2}}\right| = \sqrt{3}\quad |z^2+1| \geq |z|^2-1 = 8$$

En los puntos de C en los que el integrando este definido.
Por consiguiente, en esos puntos

$$\left|\frac{z^{1/2}}{z^2+1}\right| \leq M$$



Donde $M = \frac{\sqrt{3}}{8}$ como la longitud del contorno es $L = 3\pi$

la cota anunciada para el modulo del valor de la integral es ahora consecuencia de la propiedad.

7) Verificar el teorema de Green en el plano $\oint_C x^2y\,dx + (y^3 - xy^2)\,dy$ donde c es la frontera de la región que encierra los círculos $x^2+y^2=4$ ^ $x^2+y^2=16$

Primero encontramos las derivadas parciales

$\frac{\partial u}{\partial x} = y^3 - xy^2 = \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -y^2$ ^ $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2y = \quad \frac{-\partial v}{\partial x} = x^2$

Aplicamos Green $\iint_R (vx + vy)\,dxdy$

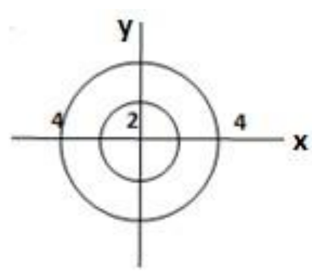
$$\int_2^4\int_0 (-y^2 - x^2dy)dx \quad \text{Donde } r = (-y^2 - x^2)$$

$$\Rightarrow x = r\cos\theta \qquad y = r\,sen\theta \Rightarrow d\theta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta & sen\theta \\ -r\,sen\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow r\cos\theta^2 + r\,sen\theta^2 = r \Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_2^4 (-r^2 r\,dr)\,d\theta \Rightarrow$$

$$\int_0^{2\pi}\int_2^4 -r^3dr \quad \Rightarrow \quad \int_0^{2\pi} -\frac{r^4}{4}\Big]_2^4$$



$$\int_0^{2\pi} -60\,d\theta = -60\theta\Big]_0^{2\pi} = -60\ 2\pi\ = 2\pi\ 60\ = 120\pi$$

8) Hallar el valor numérico de $\int_{(0,3)}^{(2,4)} 2y+x^2\ dx+(3x-y)$. A lo largo de a) la parábola $x=2t, y=t^2+3$;

$$\int_{t=0}^{1} 2\,t^2+3+2t^2\,2dt+3\,2t-t^2+3\ 2tdt= \int_{0}^{1} 24t^2+12-2t^3-6t\,dt=\frac{33}{2}$$

b) las líneas rectas desde (0,3) a (2,3), y=3, dy =0

$$\int_{x=0}^{2} 6+x^2\,dx+x-3\,0= \qquad \int_{x=0}^{2} 6+x^2\,dx=\frac{44}{3}$$

Luego desde (2,3) a (2,4), x=2, dx=0

$$\int_{y=3}^{4} 2y+4\,0+6-y\,dy= \qquad \int_{y=3}^{4} 6-y\ dy= \frac{5}{2}$$

Entonces el valor buscado $=\frac{44}{3}+\frac{5}{2}=\frac{103}{6}$

9) Verificar el teorema de green para el plano $2xy-x^2\ dx+\ x+y^2\ dy$

Donde c es la curva cerrada de la región limitada por $y=x^2$ y $y^2=x$

A lo largo de $y=x^2$

$$\int_{x=0}^{1} 2x(x^2-x^2)dx+(x+x^{2\,2}dx^2= \int_{0}^{1} 2x^3+x^2+2x^5\,dx=\frac{7}{6}$$

A lo largo de $y^2=x$

$$\int_{y=1}^{0} 2y^2\,y-y^{2\,2})dy(y^2)+(y^2+y^2)dy= \int_{1}^{0} 4y^4-2y^5+2y^2\,dy=-17/15$$

4.1 FUNCION PERIODICA.

Se dice que una función f tiene un periodo T si para Z $\forall Z \in D f \; z+t = f \; z \; T$ a te positiva.

Ejemplo de estas funciones es el *Sen* porque tiene periodo de *2π, 4π, 6π Sen θ+2π = Senθ*.

4.2 SERIE DE FOURIER.

Sea *f(x)* en intervalo abierto *(-L, L)* y fuera de este intervalo que tiene a *f(x+2L)=f(x)* entonces *f(x)* tiene periodos *L* y la serie de Fourier se define como:

$$f(x) = a_{0/2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Donde a_0, a_n y b_n se llaman coeficientes de Fourier. Donde:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \, Cos \frac{n\pi x}{L} \, dx \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \, Sen \frac{n\pi x}{L} \, dx$$

Si *f(x)* tiene periodo de *2L* los coeficientes a_n y b_n se pueden determinar asi mismos como:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L+2L} f(x) \, Cos \frac{n\pi x}{L} \, dx \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L+2L} f(x) \, Sen \frac{n\pi x}{L} \, dx \qquad a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \, dx \quad c \in R$$

Las series de Fourier en *Sen* y *Cos* definidas en el intervalo abierto *(-L, L)* siendo par o impar queda definida en la mitad de otro intervalo abierto *(-L, 0)*. En el 1° caso:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x) \, Cos \frac{n\pi x}{L} \, dx \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x) \, Sen \frac{n\pi x}{L} \, dx$$

Teorema: la serie de Fourier de *f(x)* se puede integrar termino a termino de a-x y la serie que resulta converge uniformemente hacia $\int_a^x f(x) \, dx$

Siempre *f(x)* sea casi continua en el intervalo cerrado *(-L, L)* y *a* y *x* están en el intervalo $\int_a^b f(x) \, dx = F(x) \quad g(x) \int_a^x f(t) \, dt \Rightarrow g'(x) = f(x)$ **

Teorema: Si cada término de una serie infinita en (a , b) y la serie es uniformemente convergente a la suma en este intervalo *f(z),* entonces

1- *f(z)* es también continua en el intervalo
2- La serie puede ser integrada termino a término esto es:

$$\int_b^a \sum_{n=1}^{\infty} an(z)\, dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b an(z)\, dz$$

En cada término de la serie infinita tiene una derivada y la serie de derivadas converge, entonces la serie puede ser diferenciada término a término esto es:Escriba aquí la ecuación.

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} an(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} an(x)$$

4.3 NOTACION COMPLEJA PARA LAS SERIES DE FOURIER.

Por ley de Euler $e^{i\theta} = Cos\theta + iSen\theta$ $e^{i\theta} = Sen\theta + Cos\theta$ entonces la serie de Fourier para $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}}$ donde $c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx$ Si f(x) es discontinua en x el 1° miembro se sustituye por $\frac{f(x+c)+f(x-c)}{2}$.

4.4 CONDICIONES DIRICHLET.

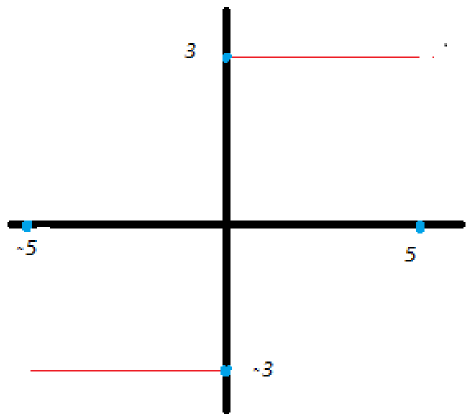
Supóngase que f(x) está definida y es uniforme, excepto el numero finito del intervalo (-L, L).

f(x) es periodica fuera de este intervalo con periodo 2L

f x y f’ x son casi continuas en -L, L)$\Rightarrow$ la serie de Fourier con coeficientes a_n y b_n convergen hacia

a) f(x) si x es un punto de continuidad
b) convergen hacia $\frac{f(x+c)+f(x-c)}{2}$ si x es un punto de discontinuidad

EJERCICIO: graficar f(x) {3 (0<x<5) -3 (-5<x<0) y encontrar el periodo

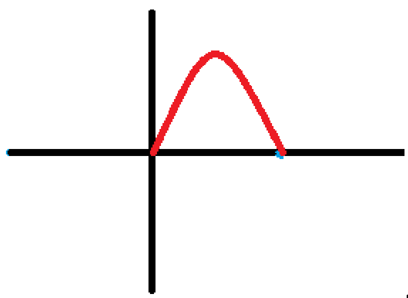


En el punto 0 se indefine la función

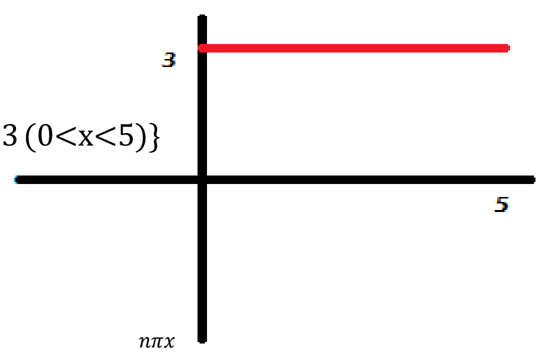
Periodo:

f(x)=f(x+T)   T=10   2serie=T

f x Sen x 0≤x≤π 0 π≤x≤2π



2π



a) Hallar los coeficientes de Fourier para f(x){0 (-5<x<0) 3 (0<x<5)}

b) Escribir la serie de Fourier correspondiente

T=0   2L= 2(5)= 10   f(x+2L) = f(x)

$$f\ x = a_{0/2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \quad a^n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L+2L} f\ x\ Cos\frac{n\pi x}{L}\, dx$$

$$a_s = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f\ x Cos\frac{n\pi x}{L}\, dx \quad \Rightarrow n=0 \quad \frac{1}{s}\int_{-s}^{s} f\ x\ Cos\frac{0\pi x}{s}\, dx \quad \frac{1}{s}\int_{-s}^{s} f\ x\ 0 dx$$

$$\frac{1}{s}\int_{-s}^{s} 0dx=0 \quad \wedge \quad \frac{1}{5}\int_0^5 3dx = 3$$ se suman ⇒ $a_0 = 3$ $\quad a_n = \frac{1}{5}\int_{-5}^{0} 0Cos\frac{n\pi x}{L}\, dx +$

$$\frac{1}{5}\int_0^5 3\ Cos\frac{n\pi x}{5}\, dx = \frac{3}{5n\pi}\int_{-5}^{0} Cos\frac{n\pi x}{5}\, dx = + \frac{3}{5n\pi}\left(Sin\frac{n\pi x}{5}\Big|_0^5\right) = \frac{3}{5n\pi}\ \text{Sin}\ n\pi$$

$$b_n = \frac{1}{5}\int_{-5}^{0} 0Sin\frac{n\pi x}{L}\, dx + \frac{1}{5}\int_0^5 3\ Sen\frac{n\pi x}{5} = \frac{3}{5n\pi}\int_0^5 Sin\frac{n\pi x}{5}\, dx = -\frac{3}{5n\pi}\left(Cos\frac{n\pi x}{5}\Big|_0^5\right) = -\frac{3}{5n\pi}\ \text{Cos}\ n\pi$$

$$f\ x = a_{0/2} + \sum_{3}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{} + b_n \sin\frac{n\pi x}{}$$

$n\pi x$

$n=1$ L

3 L

$$f\ x = a_0 + \sum_{n=1} \frac{}{5n\pi} \operatorname{Sin} n\pi (\operatorname{Cos} \frac{n\pi x}{L}) - \frac{}{5n\pi} \operatorname{Cos} n\pi (\operatorname{Sen} \frac{}{L})$$

NOTAS

En las series de Fourier si una función es par, su desarrollo de la serie solo depende del *Cos* y la parte del *Sen* la iguala a 0 es decir el coeficiente que corresponde al *Sen=0*.

Si una función es impar en la serie de Fourier depende del *Sen* y la parte del *Cos* la iguala a 0 es decir el coeficiente que corresponde al *Cos* =0

El periodo de *Sen nx* y *Cos nx* donde n es un entero positivo es 2π/n.

El periodo de la *Tan x* es igual a π.

Una constante tiene cualquier número positivo como periodo.

Series de Fourier de *Sen* y *Cos* de longitud media estas series son aquellas que se presentan únicamente en términos de *Sen* y *Cos*. Cuando se desea una serie de longitud media correspondiente a una función es definida generalmente en el intervalo *(-L, 0)* que es la mitad del intervalo *(-L, L)* lo cual recibe el nombre de distancia media, en este caso la función se especifica como par o impar, de tal manera que este claramente en la mitad del intervalo *(-L, 0)* en este caso tenemos: $a_n = 0$ $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,Sen\,\frac{n\pi x}{L}\,dx$ $b_n = 0$ $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,Cos\,\frac{x\pi n}{L}\,dx$.

Si la función *f* es par del segmento (-a,a) entonces se cumple la igualdad

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Si la función *f* es impar en el mismo segmento la función es

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

Para una función *f(x)* con periodo

$$ak = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi}{l}x\,dx \qquad bk = 0 \qquad par$$

$$bk = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,\text{sen}\,\frac{k\pi}{l}x\,dx \qquad ak = 0 \qquad impar$$

Desarrollar la serie de Fourier de la función de periodo 2π $f\ x = x^2$ $-\pi < x < \pi$

$$2\int_0^{\pi} x^2 = 2\frac{X^3}{3} = \frac{2}{3}\pi^3$$

$$ak = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos\frac{k\pi\ 2\pi}{2\pi x} dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^3 \cos\frac{k\pi^2}{2\pi} dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(x^3 \frac{1}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2} - \int_0^{2\pi} 3x^2 \sin\frac{k\pi}{2} dx\right)$$

$$\frac{x^3}{\pi}\sin\frac{k\pi}{2} - \frac{3}{\pi}\left(\frac{x^3}{3}\sin\frac{k\pi}{2} - \int_0^{2\pi}\frac{x^3}{3}\cos\frac{k\pi}{2} dx\right)$$

4.5 PERIODO.

La identidad de Parseval $\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\{f\ x\}dx = a_{0/2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$ esta identidad se establece de esa forma.

Si a_n y b_n son coeficientes de Fourier que corresponden a *f(x)* y esta satisface la condición de Dirichlet.

Sea

$$f\ t = \cos w_1 t + \sin w_1 t$$

Funciona para cualquier combinación de seno y coseno. Esta función es periódica con periodo T. Entonces es posible encontrar enteros m y n tales que:

$$\begin{matrix} w_1 T = 2\pi m \\ w_2 T = 2\pi n \end{matrix} => \frac{w_1}{w_2} = \frac{m}{n}$$

Donde w_1/w_2 es racional.

Ejemplo:

$$f\ t = \cos\frac{t}{3} + \cos\frac{t}{4}$$

$w_1 \quad \frac{1}{-} = 3$

$w_2 \quad \frac{1}{-} = 4$

$\frac{1}{3} T = 2\pi m => T = 6\pi m$

$\frac{1}{4} T = 2\pi n => T = 8\pi n$

$\therefore T = 6\pi m = 8\pi n$

$\frac{m}{n} = \frac{8\pi}{6\pi} = \frac{4}{3} \qquad \therefore m = 4, n = 3 \qquad y \qquad T = 24\pi$

$$f \quad t \quad = \cos 10t + \cos \ 10 + \pi \ t$$

$w_1 \quad = 10t$

$w_2 = 10 + \pi \ t$

$10t \, T = 2\pi m => T = \frac{2\pi m}{10t}$

$10 + \pi \ T = 2\pi n => T = \frac{2\pi n}{(10t + \pi t)}$

$\frac{2\pi m}{10t} = \frac{2\pi n}{(10t + \pi t)} => 2\pi mt \ 10 + \pi = 20\pi nt$

$\frac{m}{n} = \frac{20\pi t}{2\pi t(10 + \pi)} = \frac{10}{10 + \pi}$

$\therefore$ *como no existe* $\frac{m}{n}$ *no es periodica.*

$$f \qquad t \qquad = \qquad (10cost)^2$$

$= 100cos^2 t = 100 \quad \frac{1}{2} \ 1 \ + \ cos2t \quad => \ 50 \ + 50cos2t$

$\therefore$ *es periodica y no depende de la constante [periodo]*
$= 2\pi$

BANCO DE EJERCICIOS DEL TEMA III (VARIABLE COMPLEJA).

1.- Separa cada una de las siguientes funciones en las partes real e imaginaria, es decir, u(x,y) y v(x,y)

a) $f\ z = 2z^2 + 3iz$

$$2\ a+bi^2+3i\ a+bi = 2\ a^2+2abi+b^2+3i\ a+ib = 2a^2+2abi+b^2+3ai-3b$$

$u=2a^2+b^2-3b$ $\qquad$ $vi=2abi+3ai$

$$z+\frac{1}{z},\ z=(x+iy)$$

$$(x+iy)+\frac{1}{x+iy}=(x+iy)+\left(\frac{1}{x+iy}\cdot\frac{x-iy}{x-iy}\right)$$

$$=(x+iy)+\left(\frac{x-iy}{x^2-ixy+ixy+y^2}\right)=(x+iy)+\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right)$$

$$=x+iy+\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{iy}{x^2+y^2}=\left(x+\frac{x}{x^2+y^2}\right)+i\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

$$\therefore$$

$$u(x,y)=x+\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$v(x,y)=y-\frac{y}{x^2+y^2}$$

b)

d)

$f(z)=z^{1/2}$

$sea z=x+iy \wedge \bar{z}=x-iy$ $\qquad$ $\frac{z}{\bar{z}}=\frac{x^2+y^2}{x-iy}$

=>

$$f\ z=z^{\frac{1}{2}}=\overline{\frac{x^2+y^2}{x-iy}}=\overline{x+iy}=\overline{x^2+y^2}$$

=>

$u\ x,y = \sqrt{x^2+y^2}$

$v\ x,y = 0$

2.- si $f\ z = z^2 + 2z$ demostrar que el $\lim_{z\to i} f(z) = 2i-1$

$$z^2+2z-\ 2i-1\ < \varepsilon \Rightarrow\ z^2+2z+1-2i\ < \varepsilon \Rightarrow\ \ z+1\ ^2-2i\ < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon <\ z+\ 1\ ^2-2i < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon+2i < z+1\ ^2 < \varepsilon+2i \Rightarrow z+1 < \sqrt{\varepsilon+2i} \Rightarrow z = \sqrt{\varepsilon+\ 2i}-1$$

$$\lim_{z\to i} f(z) = \lim_{z\to i} z^2+2z = i^2+2i = -1+2i = 2i-1$$

3.-Calcula el valor de los siguientes limites.

a) $\lim_{z\to e^{i\pi/4}} \frac{z^2}{z^4-z+1} = \frac{(e^{i\pi/4})^2}{e^{i\frac{\pi}{4}}{}^4+e^{i\frac{\pi}{4}}+1} = \frac{e^{i\pi^2/16}}{e^{i\frac{\pi^4}{128}}+e^{i\frac{4}{\pi}}+1} = 2\ (1+i)/\sqrt{2}$

b) $\lim_{z\to i/2} \frac{(2z-3)(4z+i)}{(iz-1)^2} = \frac{(2\ \frac{i}{2}-3)(4\ \frac{i}{2}+i)}{(i\ \frac{i}{2}\ -1)^2} = \frac{(i-3)(3i)}{(-\frac{1}{2}-1)^2} = \frac{-3-9i}{\frac{9}{4}} = -\frac{4}{3}-4i$

c) - $\lim_{z\to 1+i} \frac{z-1-i}{z^2-2z+2}\ ^2$

Factorizamos

$\lim_{z\to 1+i} [\frac{z-1+i^2}{z^2-2z+2\ ^2}] = \lim_{z\to 1+i} \frac{-1-i\ +z\ ^2}{-1-i\ +z\ ^2\ \ -1+i\ +z\ ^2}$

$$\lim_{z\to 1+i} \frac{1}{z-\ 1-i\ ^2}$$

El límite de un cociente es el cociente de los límites

$=\frac{1}{\lim_{z\to 1+i} z-1-i\ ^2}$

Podemos escribir el $\lim_{z\to 1+i} [z-\ 1-i\ ^2$ como $(\lim_{z\to 1+i} z-\ 1-i\ ^2$

$=\frac{1}{[\lim_{z\to 1+i} z-1-i\ ^2} =$ ¼

4.- $f(z)=\dfrac{z}{(z^4+1)}$ **es continua en todos los puntos y sobre el circulo** $|z|=1$**, excepto en cuatro puntos, determine tales puntos.**

$f(z)$ **no es continua cuando** $(z^4+1)=0$

$\Rightarrow$

$z^4+1=0$

$z^4=-1$

$z=\sqrt[4]{-1}$

$z=\pm\sqrt[4]{-1}$

$\Rightarrow z_1=\sqrt[4]{-1},\ z_2=-\sqrt[4]{-1},\ z_3=(-1)^{23}|,\ z_4=-(-1)^{23}|$

$\therefore f(z)$

No es continua en z_1, z_2, z_3, z_4

5.- Halla las discontinuidades de las siguientes funciones.

b)

$f(z)=\dfrac{3z^2+4}{z^4-16}$ es discontinua cuando $z=(2,0)$ ó $(-2,0)$

c) $f(z)=\cot z$

$$\cot z=\frac{\cos z}{\sin z}$$

Para que sea continúa $\sin z\neq 0$

$\sin z=0$ Sucede cuando $z=n\pi$

Por tanto $f(z)=\cot z$ es discontinua en $z=n\pi$

e) f (z)=$\frac{\tanh z}{z^2+1}=\frac{\tanh \pm i}{\pm i^2+1}=\frac{\tanh \pm 1}{-1+1}=\frac{\tanh \pm 1}{0}$

=> f(z) es discontinua en $\pm i$ porque en estos puntos se indefine la función

Diferenciación.

1- **Utilizando la definición encuentra la derivada en los puntos indicados**

a) $f\ z = 3z^2 + 4iz - 5 + i$, $z = 2$

$$.f'\ z_0 = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f\ z+\Delta z - f\ z}{\Delta z} = \frac{3\ z+\Delta z^{\ 2} + 4i\ z+\Delta z - 5 + i - 3z^{\ 2} + 4iz - 5 + i}{\Delta z}$$

$$= \frac{3(z^{\ 2} + 2\Delta zz + \Delta z^{\ 2}) + 4iz + 4i\Delta z - 5 + i - 3z^{\ 2} - 4iz + 5 - i}{\Delta z}$$

$$= \frac{3z^{\ 2} + 6\Delta zz + 3\Delta z^{\ 2} + 4iz + 4i\Delta z - 5 + i - 3z^{\ 2} - 4iz + 5 - i}{\Delta z}$$

$$= \frac{6z\Delta z + 3\Delta z^{\ 2} + 4iz}{\Delta z} = \frac{\Delta z\ 6z + 3\Delta z + 4i}{\Delta z} = 6z + 4i = 6\ 2 + 4i = 12 + 4i$$

b) $$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\frac{2\ -i+\Delta z\ +i}{(-i+\Delta z)+2i} - \frac{2i+i}{-i+2i}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\frac{-i+2\Delta z}{-i+\Delta z} - \frac{i}{i}}{\Delta z}$$

$$\to \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\frac{-i+2\Delta z}{-i+\Delta z} + \frac{i+\Delta z}{i+\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\frac{-i+2\Delta zi + \Delta z}{-i+\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{-i+2\Delta zi + \Delta z}{(-i+\Delta z)\Delta z}$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{+2\Delta zi}{(-i+\Delta z)\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2\Delta z - 1\ \ i+\Delta z}{(i+\Delta z)\Delta z}$$

$$f(z) = 3z^{-2},\ z = 1 + i$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{3(z+\Delta z)^{-2} - 3z^{-2}}{\Delta z}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\frac{3(z+\Delta z)^{-2} - 3z^{-2}}{\Delta z} = \frac{3}{\Delta z(z+\Delta z)^2} - \frac{3}{\Delta z(z)^2} = \frac{3}{\Delta z(z^2 + 2z\Delta z + \Delta z^2)} - \frac{3}{\Delta z(z)^2}$$

$$= \frac{3z^{\ 2} - 3z^{\ 2} - 6\ z\Delta z - 3\Delta z^3}{\Delta z(z^{\ 4} + 2\ z^3\Delta z + z^{\ 2}\Delta z^{\ 2})} = \frac{\Delta z(-6\ z - 3\Delta z^{\ 2})}{\Delta z(z^4 + 2z^3\Delta z + z^2\Delta z^2)}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{-6z - 3\Delta z^2}{z^4 + 2z^3\Delta z + z^2\Delta z^2} = \frac{-6\ z}{z^4} = \frac{-6}{z^3}$$

pero

$$z = 1 + i$$

c) $$\frac{-6}{(1+i)^3} = \frac{-6}{1+3i-3-i} = \frac{-6}{-2+2i} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2i} = \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2i}\cdot\frac{-i}{-i}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3i}{2}$$

3. - Para cada uno de las siguientes funciones determina en que puntos la función no es analítica. Determina la derivada en los otros puntos.

a) $f\ z = \frac{z}{z+i}$

La función $f(z) = \frac{z}{z+i}$

Es discontinua en z+i=0

z=-i

Probemos su continuidad en este punto

$$f(-i) = \frac{-i}{-i+i} = \nexists$$

$$\lim_{z\to -i} \frac{z}{z+i} = \nexists$$

No es continua en z=-i, por tanto no es analítica en dicho punto.

$$f'(z) = \frac{z+i-z}{(z+i)^2} = \frac{i}{(z+i)^2}$$

3. **DECIDE EN QUE REGION DEL PLANO ES ANALITICA LA SIGUIENTE FUNCION**

b) f (z)= zeᶻ = x+iy e^x . e^{iy} = e^x (cosy + iseny) = x+iy (e^x cosy + e^x iseny)

= (xe^x cosy- ye^x seny) + i(xe^x seny + ye^x cosy)

= $\frac{\partial u}{\partial x}$ = cosy(e^x+xe^x) – ysenye^x $\frac{\partial v}{\partial y}$ xe^xcosy+e^x(y(-seny)+ cosy)

$\frac{\partial u}{\partial y}$ xe^x (-seny) -e^x (seny + ycosy) $-\frac{\partial v}{\partial x}$ seny(e^x +xe^x) + ycosy(e^x)

=> Es continúa en todo el plano

c) $f(z) = Sen\, 2z = 2SenzCosz = 2(Sen\ xCosy + iCos\ xSeny)(Cos\ xCosy + iSen\ xSeny)$

=2 $Cos^2ySen\ xCos\ x - Sen^2yCos\ xSen\ x + i(Sen\ {}^2xSenyCosy + Cos\ 2xSenyCosy)$ -------------------U(x,y)-------------------------------- --------------------V(x,y)---------------------------

$\frac{du}{dx}$= $2Cos^2y\ Cos\ xCos\ x + Sen\ xSen\ x - 2Sen^2y(Cos\ xCos\ x + Sen\ xSen\ x)$

=$2Cos^2y\ Cos\ {}^2x + Sen\ {}^2x - 2Sen^2y\ Cos\ {}^2x + Sen\ {}^2x = Cos\ {}^2x + Sen\ {}^2x(2Cos^2y -$

$$\frac{dv}{dy} = 2Sen^2x\ CosyCosy - SenySeny\ + 2Cos^2x\ CosyCosy - SenySeny$$

$$=2Sen^2x\ Cos^2y - Sen^2y\ + 2Cos^2x\ Cos^2y - Sen^2y\ = Cos^2x + Sen^2x(2Cos^2y - 2Sen^2y)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}$$

$$\frac{du}{dy} = 2Sen\ xCos\ x\ -SenyCosy - CosySeny\ - 2Sen\ xCos\ x(CosySeny + CosySeny)$$

$$=2Sen\ xCos\ x\ -2SenyCosy\ - 2Sen\ xCos\ x\ 2SenyCosy$$

$$=2SenyCosy\ -4Sen\ xCos\ x\ = -8SenySen\ xCosyCos\ x$$

$$\frac{dv}{dx} = 2SenyCosy\ Cos\ xSen\ x + Sen\ xCos\ x\ + 2SenyCosy\ Sen\ xCos\ x + Cos\ xSen\ x$$

$$=2SenyCosy\ 2Cos\ xSen\ x\ + 2SenyCosy\ 2Cos\ xSen\ x$$

$$=8SenySen\ xCosyCos\ x$$

$$\frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}$$

Se cumple C-R, Sen2z es continua por lo tanto es analítica en todo el plano

4.- **Demuestra que la función $f\ x + iy = x^2 + iy^3$ no es analítica en ninguna parte.**

$$u = x^2 \qquad v = iy^3$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 3iy^2$$

$$\neq$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 \qquad -\frac{\partial v}{\partial x} = iy^3$$

No se cumplen las condiciones de C-R por lo tanto no es analítica.

5.-Demuestra que si $f\ z\ y\ g\ z$ son analiticas en una region R del plano complejo, entonces

b)$\frac{d}{dz}\ f(z)^{\ 2} = 2f\ z\ f^{'}\ (z)$ =$f\ z = f\ z\ ,\ y\ g\ z = z^2$

Si utilizamos la regla de la cadena

$$g^{'}\ fz\ f^{'}\ z\ = 2\ f\ z\ \ f^{'}\ (z)$$

c)

$$\frac{d}{dz}[f(z)]^{-1} = \ -\{f(z)\}^{-2} * f'(z)$$

[illegible]

Sea $=f(z)$^w= $g(\quad)$ => $\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d} * \frac{d}{dz} = g(\quad)' \frac{d}{dz}$ => $g'(f(z))\ *\ f'(z)$ $\therefore$

[illegible]

$-\{f(z)\}^{-2} *\ \ f'(z)$

6.- Demuestra que

c) $\frac{d}{dz}$ $(z^2+1)^1/^2 = \frac{z}{(z^2+1)^1/^2}$

= $1/2(z^2+1)$-$^1/^2$ $(2z)$

=2$\frac{1\ (2)z}{z^2+1\ ^1/^2}$ = $\frac{z}{(z^2+1)^1/^2}$ = $\frac{z}{(z^2+1)^1/^2}$

d) $\frac{d}{dz}\ln z^2 + 2z + 2 =$ $\frac{2z+2}{z^2 +2z+2}$

$Sea\,w = z^2 + 2z + 2 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dz}\ln w = \frac{1}{w}\frac{dw}{dz} = \frac{1}{z^2+2z+2}\,2z+2 = \frac{2z+2}{z^2+2z+2}$

Otra forma $f\ z\ = z^2 + 2z + 2 \quad \rightarrow \quad \int \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \ln f\ z\ + c$

$.f'\ z\ = 2z + 2 \quad \rightarrow \int \frac{2z+2}{z^2+2z+2} = \ln(z^2 + 2z + 2)$

INTEGRACION

1. Evaluar

a) $\int_0^{\pi/4} e^{t}\,dt = -ie^{it}\Big|_0^{\pi/4} = e^{(\pi)/4}$

$$\int_0^{\infty} e^{-zt}\,dt$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{e^{zt}}\,dt = -\frac{e^{-tz}}{z}$$

$$= \frac{-e^{-\infty}}{z} + \frac{e^{0}}{z} = \frac{1}{z}$$

b)

c) $\frac{d}{dz}$ [illegible]

2. Para cada arco C y función en los ejercicios 2-5 encontrar el valor de $\int_c f\ z\ dz$

Después observar que C es un contorno y f es continua en tramos de C

a)

$$\int_{C1} f(z)dz$$

$donde \quad f(z) = y - x - 3x^2 i$

El tramo OA :

$$\int_{OA} f(z)dz = \int_0^1 yi\overline{dy} = i\int_0^1 ydy = \frac{i}{2}$$

sobre el lado AB

$$\int_{AB} f(z)dz = \int_0^1 (1 - x - i3x^2)1dx =$$

$$\int_0^1 (1-x)dx - 3i\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{2} - i$$

Resulta entonces

$$\int_{C1} f(z)dz = \frac{1-i}{2}$$

c) $f(z) = z - 1$ $y\ C\ es\ un\ arco\ desde\ z = 0\quad asta\ z = 2, que$

ii) El segmento $0 \le x \le 2, y = 0\ del\ eje\ real$

$$\int_c z-1dz = \int (x+iy-1)dx+dy = \int_c x-1dx, (porque\ y=0) = \int_0^2 x-1\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 - x\Big|_0^2 = 2-2 = 0$$

2. Determinar el dominio de la analiticidad de la función f y aplicar el teorema de Cauchy-Goursat para demostrar que

$$\oint f(z)\,dz = 0$$

a) Cuando el contorno simple C es la circunferencia $|z|$ = 1 cuando

$$f(z) = \frac{z^2}{z-3}$$

→ Tenemos una circunferencia de radio 1 con centro en el origen y Z0=3

$\rightarrow f(z0) = \frac{3^2}{3-3} = 0$

$\rightarrow 0 = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{z^2}{z-3}dz \quad \rightarrow 0 = \int \frac{z^2}{z-3}dz$

b) $f\ z\ dz = 0$

$z\bar{z}dz$

La función es analítica en todo el plano complejo.

Considerando que 0 es una raíz de la función, la cual no esta dentro de C por lo tanto la integral vale 0.

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 2}$$

c) $$\Rightarrow \int \frac{1}{z^2 + 2z + 2}dz = \int \frac{1}{(z+1)^2 + 1}dz$$

Por otro lado las raíces de $(z+1)^2 + 1$

$$(z+1)^2 = -1$$
$$(z+1) = \sqrt{-1}$$
$$z = \pm i - 1$$
$$\Rightarrow z_1 = i - 1,\ z_2 = -i - 1$$

$\therefore$ Como z_1, z_2 no están dentro de C, por cauchy

$$\int_c f(z)dz = 0$$

d)

e)
$f(z) = \tan(z)$

=>

$$\tan(z)dz = \frac{senz}{cosz}dz = senz\,cosz^{-1}dz = senz\,cosz^{-1}dz =$$

El teorema nos dice que si una función es analítica en todos sus puntos entonces la integral correspondiente es igual 0, por lo tanto:

Para que una función sea analítica debemos derivar tal funcion y ver que no existe alguna discontinuidad la derivada resultante a la tangente es igual:

$sec^2 z$

Esta función es derivable en cualquiera de sus puntos por lo tanto la funcion tangente es analítica entonces :

$\oint tanz\,dz = 0$

6.b)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + asen\theta} \qquad (-1 < a < 1)$$

Esta fórmula de integración solo tiene validez si a=0

$$\int_C \frac{2/a}{z^2 + (2i/a)z - 1} dz$$

donde C es un circulo |z| = 1

=>

$$z1 = \left(\frac{-1 + \sqrt{1 - a^2}}{a}\right)i, \qquad z2 = \left(\frac{-1 - \sqrt{1 - a^2}}{a}\right)i.$$

entonces si f(z) denota el integrando:

$$f(z) = \frac{2/a}{(z - z1)(z - z2)}$$

al ser |a|<1,

$$|z2| = \left(\frac{-1 - \sqrt{1 - a^2}}{|a|}\right) > 1.$$

ahora si |z1*z2| =1 entonces |z1| < 1.

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z - z1} \quad donde\ \varphi(z) = \frac{2/a}{z - z2}$$

Por lo tanto z1 es un polo simple y

$$B1 = \varphi(z1) = \frac{2/a}{z1 - z2}$$

$= \frac{1}{i}$

1

$-$

a_2

∴

$$\int_C \frac{2/a}{z^2+(2i/a)z-1}dz = 2\pi I b1 = \frac{2\pi}{1-a^2}$$

f) $f(z) = \log(z+2)$

el $\log(z)$ esta definido solo para z>0, $z>0, \Rightarrow \log(z+2)$ estara definido para $z+2>0, \Rightarrow z> -2$

dominio de analicidadn $(-2,+\infty)$

ahora el teorema, tenernos que esta en el contorno $C = |z| = 1$esto es una circunferencia con centro en el origen de radio 1

por tanto se puede decir que

$z = z(t) = x+iy, \Rightarrow x = \cos t$ y $y = \sin t$ con $0 \le t \le 2\pi$, por tanto esta definido en el contorno y sus puntos que no son analíticos no están incluidos en este contorno cerrado, por tanto cumple el teorema $\Rightarrow \int_{|z|=1} \log(z+2)dz = 0$

3.- Evalúa cada una de las integrales siguientes, donde la trayectoria de integración es un contorno arbitrario entre los limites que se indican.

a) $\int_1^3 (z-2)^2 dz$

$\rightarrow \frac{(3-2)^3}{3} - \frac{(1-2)^3}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$

b) $\int_0^{\pi+2i} \cos\frac{z}{2} dz = \frac{1}{2}\int_0^{\pi+2i} \cos dz = \frac{1}{2}(\text{sen } z\, dz) = \frac{1}{2}(\text{sen}\,\pi+2i) = \frac{(\text{sen}\,\pi+2i)}{2}$

c) $\int_1^3 (z-2)^3 dz = \left.\frac{(z-2)^4}{4}\right|_1^3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$

5.- .- Sea C un contorno cerrado simple descrito en el sentido positivo y sea

$$g(z) = \int_c \frac{s^3 + 2s}{(s-z)^3}\, ds$$

Dem. Que $g(z) = 6\pi iz$ cuando z esta dentro de C y $g(z)$ = 0 cuando z esta fuera de C

$$\int_c \frac{s^3 + 2s}{(s-z)^3}$$

$$z_0 = z$$

$$n = 2$$

$$f(s) = s^3 + 2s \Rightarrow f'(s) = 3s^3 + 2 \Rightarrow f''(s) = 6s$$

$$f''(z_0) = 6z$$

$$\Rightarrow 6z = \frac{2}{2\pi i}\int_c \frac{s^3 + 2s}{(s-z)^3}$$

$$\therefore \int_c \frac{s^3 + 2s}{(s-z)^3} = 6\pi iz$$

Y por teorema de cauchy si z esta fuera de C $g(z) = 0$

6.- Sea C la frontera del cuadrado cuyos lados se encuentran a lo largo de la recta x=± 1 y y ± 2, donde C esta descrita en sentido positivo. Hallar el valor de cada una de las integrales siguientes.

c) $\int_c \frac{zdz}{2z+1}$

sabemos que es analitica, por tanto es posible aplicar la ecuación de couchy

$f\, z_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{zdz}{2z+1} = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{z}{z - -\frac{1}{2}} \Rightarrow 2\pi i \; -\frac{1}{2} = \int_c \frac{z}{z - -\frac{1}{2}} \Rightarrow -\pi i = \int \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$ con

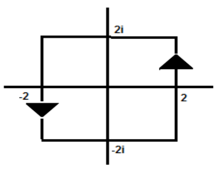
$z_0 = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{z}{2z+1} = \frac{z}{z+\frac{1}{2}} = \frac{z}{z-(-\frac{1}{2})}$$

$$\int_c \frac{zdz}{2z+1} = -\pi i$$

d) d) $\int_c \frac{\tan(z/2)}{(z-x^0)^2} dz$

e) $\int \frac{Cos\ z}{z^4} dz \qquad = \int \frac{Cos\ z}{(z-0)^{3+1}} = \frac{2\pi i}{3!} \frac{d^3}{dz^3} Cos\ z_{z=0} = \frac{-\pi i}{3}\ 0 = 0$



7. - **Encontrar el valor de la integral de $g(z)$ alrededor del contorno cerrado simple |z-1|=2 en sentido positivo cuando**

$$g(z) = \frac{1}{z^2-4}$$

$\rightarrow \quad z^2 - 4 = (z+2i)(z-2i)$

$\rightarrow g(z) = \frac{1}{z+2i}$ y $z0 = 2i$

$\rightarrow g(2i) = \frac{1}{2i+2i} = \frac{1}{4i}$

$\rightarrow \frac{1}{4i} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\frac{1}{z+2i}}{z-2i} dz$

$\rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{1}{z^2-4} dz$

$\rightarrow \frac{2\pi i}{4i} = \int_l \frac{\frac{1}{z+2i}}{z-2i} dz$

$$\int_l \frac{1}{z^2-4} dz = \frac{1\pi i}{2}$$

b) $g(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2}$

$= \int \frac{1}{z-2i\ \ z+2i\ ^2} = \int \frac{1}{z-2i\ ^2 z+2i\ ^2} dz = \int \frac{\frac{1}{z+2i\ ^2}}{z-2i\ ^2}$

$\Rightarrow n = 1\ z0 = 2i$

$f\ \ z\ \ = \frac{1}{z+2i\ ^2} \qquad f'\ z\ = \frac{2}{z+2i\ ^3} \qquad f\ z0\ = \frac{2}{2i+2i\ ^3} = -\frac{2}{-64i} = \frac{1}{32i}$

$\frac{1}{2\pi i} \quad \frac{\frac{1}{z+2i\ \ ^2}}{z-\ 2i\ ^2} \quad \to \frac{2\pi i}{32i} = \frac{1}{z^2+4} dz = \quad \frac{\pi}{16} = \frac{1}{z^2+4\ ^2} dz$

8. Hallar el valor de

$. \int_{(0,1)}^{(2,5)} 3 + y\ dx + 2y - x\ dy$

A lo largo de

a) de $y = x^2 + 1$

$dy = 2xdx$

$\int_{(1)}^{(5)} 3 + (x^2+1)\ dx + 2(x^2+1) - x\ 2xdx$

$\int_{(1)}^{(5)} 3 + (x^2+1)\ dx + 2x^2+2) - x\ 2xdx$

$\int_{(1)}^{(5)} 3 + (x^2\ +1)\ dx +\ \ 4x^3\ + 4x) - 2x^2\ dx$

$\text{->} \int_1^5 (4x^3 - x^2 + 4x + 3)dx =$

$.\ \frac{5^4}{4} - \frac{5^3}{3} + \frac{5^2}{2} + 3\ \ 5 \quad -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 3\ \ 1\ \right)$

A lo largo de la línea recta que une (0,1) y (2,5)

$.\frac{5-1}{2-0} = 2$

$.5 = 2(2) + b$

$y = 2x + 1$

$d\,y = 2dx$

$$\int_{(0)}^{(2)} 3 + (2x + 1\; dx + 2(2x + 1) - x\; 2dx$$

$$\int_{(0)}^{(2)} 3 + 2x + 1\; dx + 8x + 8 - 2x\; dx$$

$$\int_{(0)}^{(2)} (8x + 12)dx$$

$$= \;4(2)^2 + 12(2)\; - (4x\;\; 0\;\;^2 + 12(0))$$

$.= 40$

b)

de la recta desde (0,3) a (2,3) $y=3$ $dy=0$

=>

$$\int_{x=0}^{2} (6+x^2)dx + (3x-3)0 =$$

$$\int_{x=0}^{2} (6+x^2)dx = 44/3$$

de la recta desde (2,3) a (2,4) $x=2$ $dx=0$

=>

$$\int_{y=3}^{4} (2y+4)0 + (6-y)dy = \qquad \int_{y=3}^{4} (6-y)dy = 5/2$$

Entonces el valor buscado = 44/3 + 5/2 = 103/6

c) $\int_{(0,1)}^{(2,5)} 3x+y\,dx+(2y-x)dy$

Por ser dos trayectorias se divide en 2 integrales que al sumarse nos da el resultado

1 parte

$$\int_{(0,1)}^{(0,5)} 3x+y\,dx+(2y-x)dy$$

y=y y x=0

dy=dy dx=0

$$\int_{(1)}^{(5)} 3x+y\,dx+(2y-x)dy= \quad \int_{(1)}^{(5)} (2y)dy= \left.\frac{2y^2}{2}\right|_1^5=25-1=24$$

2 parte

$$\int_{(0,5)}^{(2,5)} 3x+y\,dx+(2y-x)dy$$

y=2 y x=x

dy=0 dx=dx

$$\int_{(0)}^{(2)} 3x+y\,dx+(2y-x)dy= \quad \int_{(0)}^{(2)} 3x+2dx= \left.\frac{3x^2}{2}\right|_0^2+\left.2x\right|_0^2=6+4=10$$

$$\rightarrow \int_{(0,1)}^{(2,5)} 3x+y\,dx+(2y-x)dy=24+10=30$$

d) las líneas recatas desde (0,1) a(2,1) y luego desde (2,1) a (2,5).

Por se dos trayectorias se divide en 2 integrales que al sumarse nos da el resultado

1 parte

$$\int_{(0,1)}^{(2,1)} 3x+y\,dx+(2y-x)dy$$

y=1 y x=x

dy=0 dx=dx

$$\int_{(0)}^{(2)} 3x+y\,dx+(2y-x)\,dy= \int_{(0)}^{(2)} (3x+1)dx= \frac{3x^2}{2}\Big|_0^2 + x\Big|_0^2 = 6+2=8$$

2 parte

$$\int_{(2,1)}^{(2,5)} 3x+y\,dx+(2y-x)dy$$

y=y y x=2

dy=dy dx=0

$$\int_{(1)}^{(5)} 3x+y\,dx+(2y-x)\,dy= \int_{(1)}^{(5)} 2y-2\,dy= y^2\Big|_1^5 -2y\Big|_1^5 = 24-8=16$$

$$\Rightarrow \int_{(0,1)}^{(2,5)} 3x+y\;dx+(2y-x)\,dy=8+16=24$$

10.-**Hallarelvalornuméricode** $(x^2-iy^2)\,dz$ **alo largode a)la**

parábolade $y=2x^2$ **desde(1,1)a(2,8).**

$\rightarrow \int_{(1,1)}^{(2,8)} x^2-iy^2 dz$ Tal que $y=2x^2$

$\rightarrow i \int_1^2 (x^2-2x^2)6z\,dz$

$\rightarrow -i6z \int_1^2 \frac{x^3}{3}\,dz \rightarrow = -\text{i}6\text{z}\,\frac{8}{3} + \text{i}6\text{z}\,\frac{1}{3}$

b) las líneas rectas desde (1,1) a (1,8) y luego desde (1,8) a (2,8),

$$\int f\,z\,dz = \int_a^b f\,z\,t\,z'\,t\,dt$$

Donde la curva c: $= z\,t = x\,t + iy\,t\,,\,t\,\nabla\,[a,b)$

La primera curva parametrizada es

$$x\ t\ =1\ \ y\ t\ =t\ \ t\ \nabla)[1.8)$$

La segunda curva parametrizada

$$x\ t\ =t\ y\ t\ =8\ \ t\,\nabla\,[1,2)$$

$$\int_1^8 1+t^2dt+\int_1^2 t^2\quad -i64dt$$

$$\frac{t^3}{3}+it=\frac{512}{3}+i8-\frac{1}{3}+i=\frac{511}{3}+7i$$

$$\frac{t^3}{3}-64it=\frac{8}{3}-128i-\frac{1}{3}-64it=\frac{7}{3}-64i$$

$$=\frac{511}{3}+\frac{7}{3}-64i+7i=\frac{518}{3}-57i$$

c) la línea recta desde (1.1) a (2,8)

$$\int_c f(z)=f(z(t)).z'(t)dt$$

Donde C: $z=z(t)=x(t)+iy(t),t[a,b]$

$x(t) = t$

$y(t) = 7t - 6$

$\Rightarrow$

$z = z(t) = t + i(7t - 6)$

$z'(t) = 1 + i7$

$f(z(t)) = t^2 - i(7t - 6)^2$

$$\Rightarrow \int_c f(z) = \int_1^2 (t^2 - i(7t-6)^2)(1+i7)dt$$

$$= \int_1^2 t^2 - i(49t^2 - 84t + 36)(1+i7)dt$$

$$= \int_1^2 (t^2 - 49it^2 + 84it - 36i)(1+i7)dt$$

$$= \int_1^2 t^2 - 49it^2 + 84it - 36i + i7t^2 + 343t^2 - 588t + 252dt$$

$$= \int_1^2 344t^2 - 42it^2 + 84it - 36i - 588t + 252dt$$

$$= \frac{344}{3}t^3 - 14it^3 + 42it^2 - 36it - 294t^2 + 252t$$

$$= \frac{-344}{3} + 14i + 42i - 36i - 294 - 252 + \frac{2752}{3} - 112i + 168i - 72i - 1176 + 504$$

$$= \frac{-344}{3} + \frac{2753}{3} + \frac{882}{3} - \frac{756}{3} - \frac{3528}{3} + \frac{1512}{3} - 8i$$

$$= \frac{518}{3} - 8i$$

11.- hallar el valor numérico de $\int x^2 - iy^2 \quad dz \ a\ lo\ largo\ de$

b

$\int_C z\, dz$ desde $z=0$ a $z=4+2i$ a lo largo de la curva C dada por $z=t^2+it$

Entonces

$t = 0 \quad y \quad t = 2$

$$\int_{t=0}^{2} (t^2+it)\, d(t^2+it) =$$

$$\int_0^2 (t^2 + it)\ (2t + i)dt =$$

$$\int_0^2 (t^3 - it^2 + t)dt = 10 - 8i/3$$

c) las líneas recatas desde (2,0) a (2,2) y de (2,2) a (0,2)

$z = x + iy$

$$\int_c z^2 + 3z\,dz = \int_{(c)} (x+iy)^2 + 3(x+iy)(dx+dy)$$

$$= \int_c (x^2 - y^2 + i2yx + 3x + 3iy)\,dx + dy$$

$$= \int_c (x^2 - y^2 + 3x) + i\,2yx + 3y\ \ dx + dy$$

$$u = x^2 - y^2 + 3x,\ v = 2yx + 3y$$

1 parte

$$\int_{2,0}^{2,2} (x^2 - y^2 + 3x)dx - 2yx + 3y\,dy + i\int_{2,0}^{2,2} 2yx + 3y\,dx + (x^2 - y^2 + 3x)dy$$

$$x = 2, \quad dx = 0 \quad y = dy, \quad dy = dy$$

$$\int_0^2 -4y + 3y\,dy + i\int_0^2 -y^2 + 10\,dy = -\frac{7y}{3}\Big|_0^2 + i\left(-\frac{y^3}{3}\Big|_0^2 + 10y\Big|_0^2\right) = -14 + i\frac{52}{3}$$

2 parte

$$\int_{2,2}^{0,2} (x^2 - y^2 + 3x)dx - 2yx + 3y\,dy + i\int_{2,2}^{0,2} 2yx + 3y\,dx + (x^2 - y^2 + 3x)dy$$

$$x = x, \quad dx = dx \quad y = 2, \quad dy = 0$$

$$\int_2^0 (x^2 - 4 + 3x)dx$$

$$+ i\int_2^0 4x + 6\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^0 - 4x\Big|_2^0 + \frac{3x^2}{2}\Big|_2^0 + i\left(2x^2\Big|_2^0 + 6x\Big|_2^0\right) = -\frac{2}{3} - i20$$

$$\int_c z^2 + 3z\,dz = -14 + i\frac{52}{3} + \left(-\frac{2}{3} - i20\right) = \frac{42}{3} - i\frac{8}{3}$$

12.- Hallar el valor numérico

A) $\int_{i}^{2-i} (3xy+iy^2)dz$

M= $\frac{y2-y1}{x2-x1}$ = $\frac{-1-1}{2+0}$ = $\frac{-2}{2}$ = -1

=>(x2-x1)-1=y2-y1 x=-y+1

=>(x-0)-1= y-1 y= -x-1

Z=y-1+i-x-1 dy= -1+i

$\int_{i}^{2-i} (3xy+iy^2)dz = \int_{i}^{2-i} 3\ -y+1\ y+iy\ ^2\ (-1+i)dy$

=>-1+i($\int_{i}^{2-i} -3y^2dy + \int_{i}^{2-i} 3ydy$ + i $\int_{i}^{2-i} y^2dy$) = ($\frac{-3y^3}{3} + \frac{3y^2}{3}\Big|_i^{2-i}$ +i($\frac{y^3}{3}$) $\Big|_i^{2-i}$)(-1+i) $\Big|_i^{2-i}$

=> $-\frac{4}{8} + \frac{8}{3}i$

b) A lo largo de la curva $x = 2t$, $y = 1 + t - t^2$

Los puntos (0,i) y (2,-i) corresponden a t=1 y t=2 respectivamente

Entonces $\int_1^2 3\ 2t\ 1+t-t^2\ 2dt + (1+t-t^2)^2(-2t+1)dt$

$=2\int_1^2 6t+6t^2-6t^3\,dt+\int_1^2 1-2t^5-t^4+4t^3-3t^2-4t\,dt= \qquad -\frac{1}{3}+\frac{79}{30}i$

13.- Hallar el valor numérico de $(5z^4 - z^3 + 2)dz$ alrededor de

a) el circulo |z|=1

→ Tenemos un círculo de radio 1 con centro en el origen cuya paremetrización es: $2\pi i$

→ Resolviendo la integran tenemos

$$\int_0^{2\pi} (5z^4 - z^3 + 2)dz$$

→ $\frac{5z^5}{5} - \frac{z^4}{4} + 2z$ Evaluado de $2\pi\ a\ 0$

$\rightarrow 2\pi^5 - \frac{2\pi}{4}^4 + 4\pi$

$\rightarrow 2\pi^5 - \frac{2\pi}{4}^4 + 4\pi$ Es el resultado de la integral

17.Probar que $\int_c (y^2\cos x - 2e^y)dx + (2y\sin x\, 2xe^y)dy = 0$ alrededor de cualquier curva simple C. b) hallar el valor numérico de la integral a lo largo de la parábola $y = x^2$ desde (0,0) a (π, π^2)

Esta función es analítica sobre cualquier curva y dentro por tanto cumple el teorema de cauchy.

Se puede aplicar una de las variaciones de este método

$$z = z(t) \Rightarrow \int_c f(z)\,dz = F(z(a)) - F(z(b)) \quad , a \le t \le b \qquad F(z) = f'(z)$$

Por tanto en este caso

$$\int_c (y^2 \cos x - 2e^y)dx + (2y \sin x\, 2xe^y)dy$$

$$x = x, dx = dx \qquad\qquad y = x^2, dy = 2xdx$$

$$\int_{(0,0)}^{(\pi,\pi^2)} (y^2\cos x - 2e^y)dx + (2y\sin x\, 2xe^y)dy$$

$$= \int_0^\pi (x^4\cos x - 2e^{x^2})dx + (2x^2\sin x - 2e^{x^2})2xdx = \int_0^\pi (x^4\cos x - 2e^{x^2}$$
$$+ 4x^3\sin x - 4xe^{x^2})dx = (4x^3\cos x - x^4\sin x - 4xe^{x^2}$$
$$- 12x^2\sin x - 4x^3\cos x - 6xe^{x^2} + 8x\,e^{x^2})\Big|_0^\pi$$
$$= 4\pi^3\cos\pi - \pi^4\sin\pi - 4\pi e^{\pi^2}$$
$$-12\pi^2\sin\pi - 4\pi^3\cos\pi - 6\pi e^{\pi^2} + 8\pi\,e^{\pi^2} = -10\pi e^{\pi^2} + 8\pi e^{\pi^2} = -2\pi e^{\pi^2}$$

18.-Hallar el valor numérico de $\int_c \bar{z}\,dz$ alrededor de z=0 a z=4+2i

$$\int_c (x - iy)(dx + idy) = \int_c xdx + ydy + i\int_c xdy - ydx$$

=> ${}_{y=0}^{2}\ 0\,0 + ydy$ + i ${}_{y=0}^{2}\ 0\,dy - y(0)$ = ${}_{y=0}^{2}\ ydy$=2

=> ${}_{x=0}^{4} xdx + 2.0$ + i ${}_{x=0}^{4} x.\,0 - 2dy$ = ${}_{x=0}^{4} xdx$ + i ${}_{x=0}^{4} -2dx$ = 8-8i

=>2+(8-8i)= 10-8i

19.- Verificar el teorema de cauchy para la función

a) $3z^2 + iz - 4$

como la función es polinomica es continua en C, por lo que no cumle el teorema de cauchy.

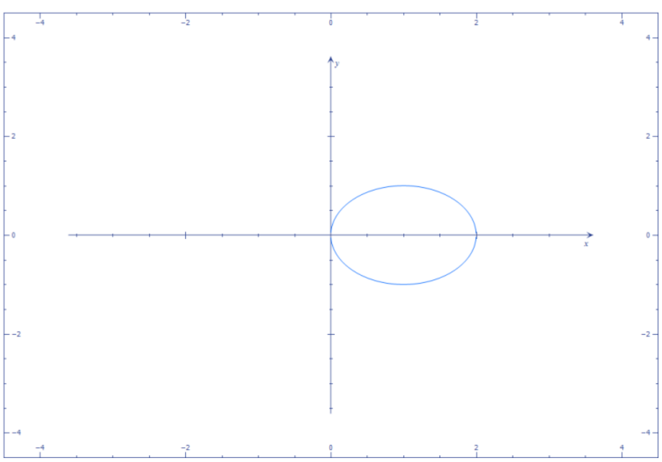
b) $f(z) = 5sen2z$

Como $f(z)$ es polinomica es contnua en C, no cumple con el teorema de cauchy

20.- Verificar el teorema de couchy para la función $z^3 - iz^2 - 5z + 2i$ si C es,

b) El circulo $z - 1 \ = 2$

c= a la circunfería de radio 2 centrado en x=2



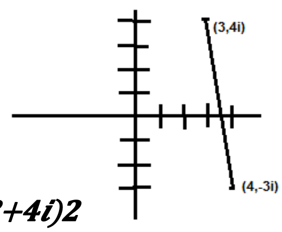
$$ {}_{z-1\ =2} (z^3 - iz^2 - 5z + 2i)\mathrm{dz} = 0 $$

$$ x = x\ t = \cos t, \qquad y = y\ t = \sin t, con\, 0 \le t \le 2\pi $$

Por eso se puede deducir que es una función analítica dentro y alrededor del contorno cerrado, por tanto cumple couchy.

21.-MOSTRAR DIRECTAMENTE QUE $\int_{3+4i}^{4-3i} 6z^2 + 8iz\,dz$ TIENE EL MISMO VALOR A LO LARGO DE LOS SIGUIENTES CAMINOS C QUE UNEN LOS PUNTOS 3+4i Y 4-3i.

a) Una linea recta $\int_{3+4i}^{4-3i} 6z^2 + 8iz\,dz = \int_{3+4i}^{4-3i} 6z^2 dz + \int_{3+4i}^{4-3i} 8iz\,dz$



$=2z^3 \Big|_{3+4i}^{4-3i} + 4iz^2 \Big|_{3+4i}^{4-3i}$

$=2((4-3i)^3-3+4i)^3+4i((4-3i)^2-3+4i)^2$

$=238-266i$

22.- Hallar el valor numérico de $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^z}{z-2}\,dz$ **si C es:**

a) el circulo $|z| = 3$

b) el circulo $|z| = 1$

a) Por teorema de cauchy

$$f(z) = e^z$$

$$z_0 = 2$$

$$f(z_0) = e^2$$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{e^z}{z-2}$$

$$e^2 = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{e^z}{z-2}$$

b) Como z_0 está fuera de C, la integral es 0

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{e^z}{z-2} = 0$$

26.- HALLAR EL VALOR NUMERICO DE $\oint_C \frac{\operatorname{sen}^6 z}{(z-\frac{\pi}{6})^3}dz$

$$\oint \frac{g(z)}{(z-z_0)^{m+1}} = \frac{2\pi i}{m!}\frac{d^m g(z)}{dz^m}\Big|_{z=z_0}$$

$$\rightarrow \quad m = 2 \quad , \quad z_0 = \frac{\pi}{6} \qquad\qquad I = \frac{2\pi i}{2!}\frac{d^2}{d^2 z} Sen^6 z \Big|_{\pi/6}$$

$$= \frac{2\pi i}{2}\, 6 Sen^5 z \, Cos z \Big|_{\pi/6}$$

$$= 6\pi i\left(5 Sen^4 z \, Cos z \, Cos z + Sen^5 z \, (-Sen z)\right)\Big|_{\pi/6}$$

$$= \frac{21\pi}{16}$$

17). Probar que si f(z) es integrable a lo largo de una curva C de longitud L finita y si existe un número M positivo tal que |f(z)|<M sobre C entonces

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le ML$$

Por definición

$$\int_C f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon K)\Delta ZK$$

ahora

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon K)\Delta ZK\right| \le \sum_{k=1}^{n} |f(\varepsilon K)||\Delta ZK|$$

$$\le M \sum_{k=1}^{n} |\Delta ZK|$$

$$\le ML$$

donde hemos empleado el hecho que |*f(z)*|< M para todos los puntos sobre C y que

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta ZK|$$

representa la suma de todas las longitudes de las cuerdas que unen los puntos z_{k-1} , z_k , donde

k=1,2,3,....,n y esta suma no es mayor que la longitud de C

Por lo tanto tomando el límite de ambos lados es posible demostrar que:

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)||dz|$$

20.b)

Hallar el valor de $\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n}$ ***, n=2,3,4,..., donde z*** $= a$ ***está dentro de C***

Entonces

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint_r \frac{dz}{(z-a)^n} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{i\,d\theta}{e^n e^{in\theta}} = \frac{i}{e^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{(1-n)i\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{i}{e^{n-1}} \frac{e^{(1-n)i\theta}}{(1-n)i} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{(1-n)e^{n-1}} [e^{2(1-n)\pi i} - 1] = 0$$

Solo si n $\neq$ 1

Calcular las raíces siguientes: $2i^{1/2}$

Z=2i

|z|=$(2^2)^{1/2}$=2

α= π/2

La función

U(x,y)= $\frac{x}{x^2+y^2}$

¿Es armónica?

No debido a que la segunda derivada con respecto de X mas la segunda derivada con respecto de Y no es igual a cero

f(z)= $z^2 + 2z$

$\lim_{z\to i} f(z)$ =2i+1 = i^2 +2(i)=2i-1

Calcular: $\lim_{z\to i/2}$ (2z-3)(4z+i)/$=(iz-1)^2$

→ (2($\frac{i}{2}$)-3) (4($\frac{i}{2}$)+i)/$(i(\frac{i}{2}) - 1^2)$

→ (i-3) (3i)/$(-(\frac{1}{2}) - 1^2)$

→ (9i-3)/ $(-(\frac{3}{2}))$

→ (18i-6)/-3

=2-6i

b) $\lim_{z\to 1+i} \frac{z-1-i}{z^2-2z+2} = \lim_{z\to 1+i} \frac{z-1-i}{z-1-i\,(z-1+i)} = \lim_{z\to 1+i} \frac{1}{(z-1+i)} = \frac{1}{(2i)}$

Halla las discontinuidades.

$.f\ z\ =\ tan\quad z\ \ /\ (z)^2-1$

$\lim_{z\to i}\quad .f\ z\ =\ tan\quad z\ /\ i\ ^2+1$

→ $tan\quad z\ /0$

Es discontinua en i

$.f\ z = \frac{3\,z\quad ^4+4}{z^4-16}$

→$\lim_{z\to 2i} \frac{3\ z^4+4}{z^4-16}$

→$3\ \ 2i\ ^4+4/\ \ 2i\ ^4-16$

→$3(16)+4/16-16)$

Es discontinua en z=2i

Derivar usando la definición:

a).$f\ z\ =3z^2+4\text{i}z-5+i$ z=2

b) $f\ z=\frac{2z+i}{\text{z}+2\text{i}}$ $\text{z}=-\text{i}$

.$f'\ 2$ =

→$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{3(2+\Delta z\ )^2+4\text{i}\ \ 2+\Delta z\ \ -5+i-12-8i+5-i}{\Delta z}$=

$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{12+12\ \Delta z+3\ \Delta z^{2}+8i+4i\Delta\ -5+i-12-8i+5-i}{\Delta z}$ = 12+4i

$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\frac{2\ -i+\Delta z\ +i}{(-i+\Delta z)+2i} - \frac{-2i+i}{-i+2i}}{\Delta z}$

→

$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\frac{-i+2\Delta z}{-i+\Delta z} - \frac{-i}{i}}{\Delta z}$

→

$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\frac{-i+2\Delta z}{-i+\Delta z} + \frac{i+\Delta z}{i+\Delta z}}{\Delta z}$

→

$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\frac{-i+2\Delta z i\ +\Delta z}{-i+\Delta z}}{\Delta z}$

→

$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{-i + 2\Delta z i + \Delta z}{(-i + \Delta z)\Delta z}$

$\lim_{\Delta z \to 0} + \frac{+2\Delta z i}{(-i+\Delta z)\Delta z}$

Entonces $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{2\Delta-1\ i+\Delta z}{(i+\Delta z)\Delta z}$

Evaluar $\int_0^{\pi/4} e^{t} dt$

Como es analítica se puede usar el RFC caso complejo:

.(($e^{\pi i}$)/i)-1

F(z)= z-1 y C es el arco desde z=0 hasta z=2 que consta de

i) Elsemicírculoz-1=e^{iQ} 0≤Q≤π,

ii) El segmento 0 ≤x≤2, y=0 de eje real

$\mathrm{f(Q)} = \mathrm{i}\, e^{2iQ}\,\mathrm{dQ}$

$= \frac{1}{2} e^{2i\pi} - \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2} e^{0} - \frac{1}{2} = 0$

$\mathrm{f\,z} = \int_0^2 (z-1)dz$

$= \frac{4}{2} - 2 = 0$

Determinar el dominio y analiticidad de la función:

$$\mathrm{f\ z} = \frac{z^2}{z-3}$$

El dominio son todas las z tal que z=! 3, esa analítica en su dominio.

Evaluar:

$$\int_i^{\frac{i}{2}} e^{\pi z}$$

$.z = x + iy$

-> $z = 0 + iy$

$\Rightarrow dz = idy$

$$\int_i^{\frac{i}{2}} e^{i\pi y}\, i\, dy$$

$\Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_i^{\frac{i}{2}} e^{i\pi y}\, \pi i\, dy$

$=\frac{1}{\pi} \quad e^{\pi i^{\frac{i}{-}}} \quad (_2) \frac{1}{\pi} \quad - \quad e^{\pi i} \quad (i)$

$\frac{1}{\pi} e^{-(\frac{\pi}{2})} - \frac{1}{\pi} e^{-\pi}$

$\int_1^3 (z-2)^3 dz$

$.z = x + iy$

$.z = x + 0i$

$.dz \quad = \quad dx$

$\int_1^3 (x-2)^3 dx$

$.u = x - 2$

$.du \quad = \quad dx$

$.\int \ (u)^3 du = \frac{(u)}{4}^4$

$.\frac{(3-2)^4}{4} - \frac{(1-2)^4}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$

1. Utilizar las fórmulas de derivadas para encontrar $f' \ z$

a) $f \ z \ = 3z^2 - 2z + 4$

$$f' \ z = 6z - 2$$

b) $f \ z = (1 - 4z^2)^3$

$$f' \ z = 3 \ 1 - 4z^{2 \ 2} * 8z$$

c) $f \ z = \frac{(z-1)}{(z+1)}$

$$\frac{1 \quad 2z + 1 \quad - (z-1)(2)}{(2z+1)^2}$$

Entonces

$\frac{2z+1 \ -(2z+2)}{(2z+1)^2} = \frac{3}{(2z+1)^2}$

d) $f(z) = \frac{(1+z^2)^4}{z^2}$ $\quad z \neq 0$

$$= [(1+z^2)^4]\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

$$= (1+z^2)^4\left(\frac{-2}{z^3}\right) + 4(1+z^2)^3\, 2z\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

$$= \frac{2(1+z^2)^4}{z^3} + \frac{4(1+z^2)^3(2z)}{z^2}$$

2. Por definición

$$f(z) = \frac{1}{z} \quad z \neq 0$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\frac{1}{z+\Delta z} - \frac{1}{z}}{\Delta z} = \frac{\frac{z-z-\Delta z}{z^2+z\Delta z}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{-\frac{\Delta z}{z^2+2\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{-\Delta z}{\Delta z(z^2+2\Delta z)}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{-1}{z^2 + 2\Delta z} = \frac{-1}{z^2}$$

Encontrar una función continua pero no derivable.

La función |z| es continua pero no derivable cuando z=0

Tarea 3.

1.

Determinar si

$$f(z) = xy + iy$$

Es analítica.

$$u = xy\,,\, v = iy$$

Entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \quad \frac{\partial v}{y} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$\therefore$ No es analítica

2.

$$g\, z = re^{\frac{i\theta}{2}} \; (r > 0,\, 0 < \theta < \pi)$$

$$e^{\frac{i\theta}{2}} = \cos\frac{\theta}{2} + ie*\sin\frac{\theta}{2};$$

Entonces

$$\overline{re^{\frac{i\theta}{2}}} = r\, \overline{e^{\frac{i\theta}{2}}} = \overline{\cos\frac{\theta}{2} + ie*\sin\frac{\theta}{2}} = r\cos\frac{\theta y}{x^2+y^2} - \frac{\theta y}{x^2+y^2} + i\sin\frac{\theta y}{x^2+y^2} - \frac{\theta i y}{x^2+y^2}$$

$$r(\cos\frac{\theta y}{x^2+y^2} - \cos\frac{\theta y}{x^2+y^2} + i\sin\frac{\theta y}{x^2+y^2} - \sin\frac{\theta y}{x^2+y^2})$$

$$u = r\cos\frac{\theta y}{x^2+y^2}\ \overline{r\sin\frac{\theta y}{x^2+y^2}}$$

$$v = \cos\frac{\theta y}{x^2+y^2}\ \overline{r\sin\frac{\theta y}{x^2+y^2}}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\theta\, r\, r^2 - i^2\sin\frac{\theta y}{x^2+y^2} - \theta\, r 2xy\cos\frac{\theta y}{x^2+y^2}}{x^2+y^2}$$

$$\neq$$

$$\frac{dv}{dy} = \frac{\theta\, r\, r^2 - i^2\sin\frac{\theta y}{x^2+y^2} - \theta\, r 2xy\cos\frac{\theta y}{x^2+y^2}}{dy}$$

[illegible]

Calcular las siguientes integrales

a) $\int_1^2 (\frac{1}{t} - i)^2 dt$ $\longrightarrow$ expandiendo $(\frac{1}{t} - i)^2$

Tenemos $\frac{1}{t^2} - \frac{2i}{x} - 1$

$$\int_1^2 (\frac{1}{t} - i)^2\, dt = \int_1^2 \frac{1}{t^2} - \frac{2i}{t} - 1\, dt$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{t^2}\, dt - 2i \int_1^2 \frac{1}{t}\, dt - \int_1^2 dt$$

$$= \int_1^2 t^{-2} dt - 2i \int_1^2 \frac{1}{t} dt - \int_1^2 dt$$

$$= \frac{t^{-1}}{-1} - 2i\ln t - t$$

$$= \frac{1}{t} - 2i\ln t - t$$

Evaluando de

$$-\frac{1}{1} - 2i\ln 1 - 1 - \ -\frac{1}{2} - 2i\ln 2 - 2 = -\frac{1}{2} - 2i\ln 2 = -\frac{1}{2} - i\ln 4$$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{i2t} dt = \frac{e^{i2t}}{2i}\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$

Evaluando si $e^{ix} = cosx + isenx$

$$\frac{1}{2i}\left(cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3} - 1\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}$$

c) $\int_0^{\infty} e^{-zt} dt$

Usando $e^{-bz} = e^{-bx}$

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-zt}\ dt$$

$$\int_0^b e^{-zt} = \frac{e^{-zt}}{-z}\Big|_0^b$$

$$\lim_{b\to\infty} \frac{e^{-zt}}{-z}\Big|_0^b = \frac{1}{z}\lim_{b\to\infty}(1 - e^{-bz})$$

$$= \frac{1}{z} \quad si\ z > 0$$

Verificar las siguientes reglas de evaluación del modo propuesto

a) Usando la regla correspondiente al cálculo real mostrar que $\frac{d}{dt}\,w(t)^2 = 2w\,t\,w'(t)$

Por regla de la cadena

Si $\frac{d}{dt}w(t)^2 = \frac{du^2}{du}\frac{du}{dx}$ cuando $u = w\ x$ y $\frac{du^2}{du} = 2u$

Sustituyendo

$$2(u\,x + iv(x))(\frac{d}{dx}(u\ x\ + iv(x))$$

Diferenciando término a término

$$= 2(u\,x + iv\,x))(\frac{d}{dx}(u\,x + i(\frac{d}{dx}v(x))$$

$$= 2(u\,x + iv\,x\,(u'\,x + i(\frac{d}{dx}v(x))$$

$$= 2(u\,x\ + iv\,x\,(u'\,x\ + iv'(x))$$

Si $w\,t = u\,x + iv\,x \cap u'\,x + iv'\,x = (u\,x + iv'(x))$

$$2w\,t + w'\,t = 2\,u\,x + iv\,x\ \cdot (u'\,x + iv'(x))$$

b) Usar la expresión $e^{z_0t} = e^{x_0t}\cos y_0t + ie^{x_0t}$ donde $z_0 = x_0 + iy_0$ es un número fijo para demostrar que $\frac{d}{dt}e^{z_0t} = z_0e^{z_0t}$

Sustituyendo

$\frac{d}{dx}e^{tx}\cos ty + ie^{tx}sen\,ty = te^{tx}(\cos ty + isen(ty))$

Si tenemos $\cos ty\,\frac{d}{dx}e^{tx} + isen(ty)(\frac{d}{dx}(e^{tx}))$

Usando regla de la cadena como

$\frac{d}{dx}e^{tx} = \frac{de^u}{du}\frac{du}{dx}$ si $u = tx$ $\cap$ $\frac{de^u}{du} = e^u$

$$\cos ty\,e^{tx}\,\frac{d}{dx}\,tx\ + isen\,ty(\frac{d}{dx}(e^{tx}))$$

$$e^{tx}\cos ty\ \ t\frac{d}{dx}\,x + isen\,ty(\frac{d}{dx}(e^{tx}))$$

$$= te^{tx}\cos ty + isen\,ty(\frac{d}{dx}(e^{tx}))$$

$$te^{x}\cos y + i\,\text{sen}\,y\,(e^{x}(tx))\quad \frac{d}{dx}$$
$$= t(e^{x}\cos y + ie^{x}\,\text{sen}\,y)$$
$$= t(e^{x}\cos y + ie^{x}\,\text{sen}\,y) = t(e^{x}\cos y + i\,\text{sen}\,y)$$
$$= te^{(x+iy)}$$

Probar que si una función $w\ t = u\ t + iv(t)$ es continua en un intervalo de $a \leq t \leq b$ entonces

a) $\int_{-b}^{a} w\,-t\,dt = \int_{a}^{b} w\ t\ dt$

Sustituyendo x=-t

$$= -\int_{b}^{a} u\ x\,dx - i\int_{b}^{a} -v(x)dx = \int_{a}^{b} u\ x\,dx + i\int_{a}^{b} v(x)dx$$
$$\int_{a}^{b} u\ x\ dx + i\int_{a}^{b} v(x)dx = \int_{a}^{b} w(x)dx$$
$$\int_{-b}^{-a} w(-t)dt = \int_{a}^{b} w(x)dx$$

b) $\int_{a}^{b} w\ t\ dt = \int_{\alpha} w\ \emptyset(\tau)\ \emptyset'(\tau)d\tau$

$$I = \int_{a}^{b} w\ t\ dt = \int_{a}^{b} u\ t\ dt + i\int_{a}^{b} v\ t\ dt$$

Si sustituimos $t = \emptyset(\tau)$

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} u\ \emptyset(\tau)\ \emptyset'\ \tau\ d\tau + i\int_{\alpha}^{\beta} v\ \emptyset(\tau)\ \emptyset'\ \tau\ d\tau$$
$$= \int_{\alpha}^{\beta} w\ \emptyset(\tau)\ \emptyset'\ \tau\ d\tau$$
$$\therefore \int_{a}^{b} w\ t\ dt = \int_{\alpha}^{\beta} w\ \emptyset(\tau)\ \emptyset'\ \tau\ d\tau$$

Dados los contornos C y las funciones f, usar las representaciones paramétricas para C o para los fragmentos de C, con el fin de calcular $\int_{c} f(z)dz$

1 $\quad f z = \frac{(z+2)}{z}$ **y c es**

a) El semicírculo $z=2e^{i\theta}\ 0\leq\theta\leq\pi$

$$\int_c \frac{(z+2)}{z})dz = \int_c 1+\frac{2}{z})dz$$
$$= \int_0^z (1+\frac{2}{e^{i\theta}})2e^{i\theta}d\theta$$
$$= 2i\int_0^\pi (e^{i\theta}\ 1)d\theta$$
$$= 2i\frac{e^{\theta}}{i} + \theta \ \ {}^{\pi} = 2i\ \ i+\pi+i\ \ = -4+2\pi i 0$$

b) El semicírculo $z = 2e^{i\theta}\ \pi \leq \theta \leq 2\pi$

$$\int_c \frac{z+2}{z})dz = 2i(\frac{e^{\theta}}{i} + \theta)_{\pi}^{2\pi}$$
$$= 2i -i + 2\pi - i - \pi \ = 4 + 2\pi i$$

c) El circulo $z=2e^{i\theta}\ 0\leq\theta\leq 2\pi$

$$\int_c \frac{z+2}{z})dz = 2i(\frac{e^{\theta}}{i} + \theta)_{0}^{2\pi}$$
$$= 4\pi i$$

2.- $\boldsymbol{f\ \ z\ \ = z-1}$ **y C es el arco desde z=0 hasta z=2 dado por**

a) El semicírculo $z = 1 + e^{i\theta}\,(\pi \leq \theta \leq 2\pi)$

$$\int_c z-1\ dz$$

$$= \int_\pi^{2\pi} 1+e^{i\theta}-1\ ie^{i\theta}d\theta$$

$$= i\int_\pi^{2\pi} e^{i2\theta}\,d\theta = i\ \ \frac{e^{i2\theta}}{2i}\ {}_{\pi}^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{-}e^{i4\pi} - e^{i2\pi} = 2 \quad \frac{1}{2} \; 1 - 1 \; = 0$$

b) El segmento $0 \leq x \leq z$ del eje real

$$\int_c z - 1 \, dz$$

$$= \int_0^2 x - 1 \, dx = \quad \frac{x^2}{2} - x \Big|_0^2 = \frac{2^2}{2} - 2 - 0 \; = 0$$

Sea el arco del circulo $z = 2$ que va de $z = 2$ y $z = 2i$ en el primer cuadrante, sin calcular la integral probar que $\int \frac{dz}{z^2 - 1} \leq \frac{\pi}{3}$

Cuando $z = 2$

Tenemos $z^2 - 1 \geq z^2 - 1 = z^2 - 1$

Sustituyendo $4 - 1 = 3$

$$\frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{z^2 - 1} \leq \frac{1}{3}$$

Tomando que $c = \frac{1}{4} 4\pi = \pi$

Si $M = \frac{1}{3} \quad \cap \quad L = \pi$

$$\frac{dz}{z^2 - 1} \leq ML = \frac{\pi}{3}$$

Sea c el segmento recto que va de z=i a z=1. Tendremos en cuenta que el punto mas próximo al origen de entre los de ese segmento es su punto medio, demostrar que $\int \frac{dz}{z^4} \leq 4\sqrt{2}$ sin calcular la integral

Suponiendo que $C = \sqrt{2}$

$$z \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{z^4} = \frac{1}{z^4} \leq 4$$

Si $M = 4 \quad \cap \quad L = \sqrt{2}$

$$\frac{dz}{z^4} \leq ML = 4\sqrt{2}$$

Calcular estas integrales donde el camino es el contorno arbitrario entre los límites de integración

a) $\int_{i}^{\frac{i}{2}} e^{\pi z}\, dz$

Integrando directamente tenemos

$$\frac{e^{\pi z}}{\pi}\Bigg|_{i}^{\frac{i}{2}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{i\pi}}{\pi} = \frac{i+1}{\pi} = \frac{1+i}{\pi}$$

b) $\int_{0}^{\pi+2i} \cos\left(\frac{z}{2}\right) dz$

Por cambio de variable

$$u = \frac{z}{2} \qquad du = \frac{1}{2}dz$$

$$2\int \cos u \; du = 2senu + c$$

Sustituyendo

$$2sen\frac{z}{2}\Bigg|_{0}^{\pi+2i} = 2sen\left(\frac{\pi}{2} + i\right)$$

$$= 2\frac{e^{\frac{\pi}{2}(-i+i)} - e^{-\frac{\pi}{2}(-i+i)}}{2i} = -i(e^{\frac{\pi}{2}i}e^{-1} - e^{-\frac{\pi}{2}i}e)$$

$$= -i\frac{i}{e} + ie = \frac{1}{e} + e = e + \frac{1}{e}$$

c) $\int_1^3 (z-2)^3 dz$

Usando un cambio de variable

$$u = z - 2 \qquad du = dz$$

$$\int u^3\, du = \frac{u^4}{4}$$

$$\left.\frac{(z-2)^4}{4}\right|_1^3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

Sea B el contorno del dominio entre el circuito $|z| = 4$ y el cuadrado cuyos lados están en las rectas $x = \pm 1$ $y = \pm 1$, supuestos B orientado de modo que los puntos de dominio queden

a la izquierda de B argumentar porque $\int_B f(z)dz = 0$

a) $f(z) = \frac{1}{3z^2+1}$

El punto singular es $z = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} i$

b) $f(z) = \frac{z+2}{\operatorname{sen}\left(\frac{z}{2}\right)}$

$$z = 2n\pi$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, ..$$

c) $f(z) = \frac{z}{1-e^{t}}$

$$z = 2n\pi i$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, ..$$

Siempre están fuera de una o dentro de otra y el integrando es analítico en los contornos entre ellos por eso $\int_{c1} f(z)dz = \int_{c2} f(z)dz$

Probar que

$$\int_{-1}^{1} z^{i} dz = \frac{1+e^{-\pi}}{2}(1-i)$$

Donde z^{i} se denota la rama principalmente $z^{i} = exp(ilogz)\ (z>0, -\pi < \arg z < \pi)$

$$z^{i} = exp\, ilogz\ \left(z>0, -\frac{\pi}{2} < arg z < \frac{3\pi}{2}\right)$$

Aplicando la anti derivada

$$I = \left.\frac{z^{i+1}}{i+1}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{i+1}\left[1^{i+1} - (-1)^{i+1}\right]$$

$$= \frac{1}{i+1}\left[e^{(i+1)\log 1} - e^{(i+1)\log(-1)}\right]$$

$$= \frac{1}{i+1}\left[e^{(i+1)(\ln 1 + i0)} - e^{(i+1)(\ln 1 + i\pi)}\right]$$

$$= \frac{1}{i+1}\left[1 - e^{-\pi} e^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1+e^{-\pi}}{i+1} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1+e^{-\pi}}{2}(1-i)$$

c_R es la posible orientación del circulo $z = R\ R_z$ si z es un punto en c_R

$$\left|\frac{\log z}{z^2}\right| = \frac{|\ln R + i\theta|}{R^2} \leq \frac{\ln R + |\theta|}{R^2} \leq \frac{\pi + \ln R}{R^2}$$

Si $-\pi < \theta \leq \pi$

$$M = \frac{\pi + \ln R}{R^2} \quad \cap \quad L = 2\pi R$$

$$\int_c \frac{\log z}{z^2}\,dz \leq ML = 2\pi\left(\frac{\pi + \ln R}{R}\right)$$

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\pi + \ln R}{R} = \lim_{R\to\infty} \frac{\frac{1}{R}}{L} = 0$$

$$\therefore \lim_{R\to\infty} \int_c \frac{\log z}{z^2}\,dz = 0$$

Sea el contorno C completo orientado positivamente del semidisco $o \leq r \leq 1;\ 0 \leq \theta \leq \pi$ y sea una función continua definida en este semidisco poniendo f(0)=0 y usando la rama

$$f(z) = \sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \left(r > o;\ \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}\right)$$

a) $c_1 = z = re^{i\theta}\ 0 \leq r \leq 1$

$$\int_{c_1} f(z)\,dz = \int_0^1 r^{\frac{1}{2}}\,dr = \frac{2}{3} r^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

b) c_2: $z = 1e^{i\theta}\ 0 \leq \theta \leq \pi$

$$\int_{c_2} f(z)\,dz = \int_0^{\pi} e^{i\frac{\theta}{2}} \cdot ie^{i\theta}\,d\theta$$

$$= i\int_0^{\pi} e^{i\frac{3\theta}{2}}\,d\theta = i\,\frac{2}{3i}\, e^{i\frac{3\theta}{2}}\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{3}(-i - 1) = -\frac{2}{3}(1 + i)$$

c) $-c_3 = z = re^{i\pi}\ 0 \leq r \leq 1$

$$\int_{c3} f(z)\,dz = -\int_{-c3} f(z)\,dz = -\int_0^1 re^{i\frac{\pi}{2}}-1\,d\bar{r}$$

$$= i\int_0^1 r\,dr = i\,\frac{2}{3} r^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} i$$

Finalmente

$$\int_c f(z)\,dz = \int_{c1} f(z)\,dz + \int_{c2} f(z)\,dz + \int_{c3} f(z)\,dz$$

Sustituyendo

$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{3} i + 1 + \frac{2}{3} i = 0$$

a) $\int_c \frac{e^{z}dz}{z - \frac{\pi i}{2}}$

$$= 2\pi i\; e^{-2} = \frac{\pi i}{2}$$

$$= 2\pi i(-i)$$

$$= 2\pi$$

b) $\int_c \frac{\cos z}{2\,z^2+8}\,dz$

$$= \frac{\frac{(\cos z)}{z^2+8}}{z-0}\,dz$$

$$= 2\pi i \frac{\cos z}{z^2+8} = 2\pi i\,\frac{1}{8} = \frac{\pi i}{4}$$

c) $\int \frac{z dz}{2z+1}\,dz$

$$= \frac{\frac{z}{2}}{z - (-\frac{1}{z})}\,dz$$

$$= 2\pi i \frac{z}{2}\Big|_{2z-\frac{1}{2}} = 2\pi i - \frac{1}{4}\, z = -\frac{\pi i}{z}$$

d) $\int \frac{\boldsymbol{coshz}}{\boldsymbol{z^4}} \boldsymbol{dz}$

$$= \int_c \frac{cos \quad z}{(z-0)^{3+1}} dz = \frac{2\pi i}{3!} \frac{d^3}{dz^3} cos \quad z$$

e) $\frac{\tan \frac{z}{2}}{(z-x_0)^2} \boldsymbol{dz}$

$$= \int_c \frac{tan(\frac{z}{2})}{(z-x_0)^{1+1}} dz$$

$$= \frac{2\pi i}{1!} \frac{d}{dz} tan \frac{2}{2} \Big|_{x_0}$$

$$= 2\pi i \frac{1}{2} sec^2 si -2 < x_0 < 2 2$$

Suponemos que la función f es analizar dentro y en el contorno cerrado en c

$$\int_c \frac{f(z)dz}{z-z_0} = 2\pi i f z_0 \int_c \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2} = \int_c \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{1+1}}$$

$$= \frac{2\pi i}{1!} f z_0$$

$$\int_c \frac{f(z)dz}{z-z_0} = \int_c \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2}$$

Con ayuda de la formula binominial probar que cada valor de n

$$\boldsymbol{P_n z} = \frac{\boldsymbol{1 d^n}}{\boldsymbol{n! 2^n dz^n}} (\boldsymbol{z^2} - \boldsymbol{1})^{\boldsymbol{n}} \qquad (\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2})$$

$$P_n z = \frac{1 d^n}{n! \, 2^n \, dz^n} \cdot \frac{d^n}{dz^n} z^2 - 1^2$$

$$= \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n}{dz^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{2n-2k} (-1)k$$

c) $\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n = \frac{n}{2\pi i}\int \frac{(s-1)^2}{(s-2)^{n+1}}ds^{\,n}$

$$P_n \quad z = \frac{1}{2^{\theta i} + \pi i} \frac{s^2-1^{\;n}}{(s-2)^{n+1}} \cancel{ds}$$

d) $\frac{s^2-1^{\;n}}{(s-2)^{n+1}} = \frac{s-1^{\;n} s+1^{\;\;n}}{(s-1)^{n+1}} = \frac{s+1^{\;n}}{s-1}$

$$P_n \quad 1 = \frac{1}{2^{n-1} + \pi i} \frac{s^2-1^{\;2}}{(s-1)^{n+1}} ds$$

$$= \frac{1}{2^n} \frac{1}{2\pi i} \quad \frac{s+1^{\;n}}{s+1} ds$$

$= \frac{1}{2^n} 2^n = 1 \qquad (n = 0,1,2)$

*EJERCICIOS RESUELTOS:

1.- $\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - i\right)^2 dt = \int_1^2 \left(\frac{1}{t^2} - 1\right) dt - 2i\int_1^2 \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2} - 2i\ln 2 = -\frac{1}{2} - i\ln 4$

2.- $\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{i2t}\, dt = \left.\frac{e^{i2t}}{2i}\right|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2i}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} - 1\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}$

3.- Desde $|e^{-zt}| = e^{-bx}$, tenemos que

$\int_0^\infty e^{-zt}\, dt = \lim_{b\to\infty} \left.\frac{e^{-zt}}{-z}\right|_{t=0}^{t=b} = \frac{1}{z}\lim_{n\to\infty}\left(1 - e^{-bz}\right) = \frac{1}{z}$ Cuando z>0

4.-f (z) = z-1 y c es el arco desde z=0 hasta z=2 dado por el semicírculo $z = 1 + e^{i\theta}\ \pi \leq \theta \leq 2\pi$

El arco es C:$z = 1 + e^{i\theta}\ \pi \leq \theta \leq 2\pi$ entonces

$$\int_c (z-1)\, dz = \int_\pi^{2\pi} \left(1 + e^{i\theta} - 1\right) ie^{i\theta}\, d\theta = i\int_\pi^{2\pi} e^{i2\theta}\, d\theta = i\left.\frac{e^{i2\theta}}{2i}\right|_\pi^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{i4\pi} - e^{i2\pi}\right) = \frac{1}{2}(1-1) = 0$$

5.-f (z) = 1 y C es un contorno arbitrario desde el punto fijo z_1 hasta el punto fijo z_2 en el plano, ambos arbitrarios.

El contorno C esta parame trisado por $z = z(t)\ a \leq t \leq b$, donde z $(a) = z_1$ y $z(b) = z_2$

$$\int_c dz = \int_a^b z'(t)\, dt = z(t)\Big|_a^b = z(b) - z(a) = z_2 - z_1$$

6.- f(z) = z – 1 y C es el arco desde z = 0 hasta z = 2 dado por el segmento $0 \leq x \leq 2$ del eje real.

Tenemos C: $z = x\ \ 0 \leq x \leq 2$ Entonces

$$\int_c (z-1)\, dz = \int_0^2 (x-1)\, dx = \left.\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\right|_0^2 = 0$$

7.- C es el arco $z = -1 - i$ hasta $z = 1 + 1i$ a lo largo de la curva $y = x^3$, y

$$f(x) = \begin{cases} 1, & si\ y < 0 \\ 4y, & si\ y > 0 \end{cases}$$

$C_1 : z = x + ix^3\ -1 \leq x \leq 0$ y $C_2 : z = x + ix^3\ 0 \leq x \leq 1$

Usando $f(z) = 1\ en\ C_1$ y $C_2 : z = x + ix^3\ 0 \leq x \leq 1$

Tenemos $\int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz = \int_{-1}^{0} 1(1 + i3x^2)\,dx + \int_{0}^{1} 4x^3(1 + i3x^2)\,dx$

$$= \int_{-1}^{0} dx + 3i \int_{-1}^{0} x^2\,dx + 4\int_{0}^{1} x^3\,dx + 12i \int_{0}^{1} x^5\,dx$$

$$= x\Big|_{-1}^{0} + i\,x^3\Big|_{-1}^{0} + x^4\Big|_{0}^{1} + 2i\,x^6\Big|_{0}^{1} = 1 + i + 1 + 2i = 2 + 3i$$

8.- $f(z) = \frac{z+2}{z}$ y C es el semicírculo $z = 2e^{i\theta}\ 0 \leq \theta \leq \pi$,

Sea C el semicirculo $z = 2e^{i\theta}\ \ 0 \leq \theta \leq \pi$,

tenemos

$$\int_c \frac{z+2}{z}\,dz = \int_c \left(1 + \frac{2}{z}\right) dz = \int_0^{\pi} \left(1 + \frac{2}{2e^{i\theta}}\right) 2ie^{i\theta}\,d\theta = 2i\int_0^{\pi} (e^{i\theta} + 1)\,d\theta$$

$$= 2i\left(\frac{e^{i\theta}}{i} + \theta\right)\Big|_0^{\pi} = 2i(i + \pi + i) = -4 + 2\pi i$$

9.- $f(z) = \frac{z+2}{z}$ y C es el semicírculo $z = 2e^{i\theta}\ 0 \leq \theta \leq \pi$,

Sea el semicírculo $z = 2e^{i\theta}\ \pi \leq \theta 2\pi$

$$\int_c \frac{z+2}{z}\,dz = 2i\left(\frac{e^{i\theta}}{i} + \theta\right)\Big|_{\pi}^{2\pi} = 2i(-i + 2\pi - i - \pi) = 4 + 2\pi i$$

10) $f(z) = \frac{z+2}{z}$ y C es el semicírculo $z = 2e^{1\theta}$ $0 \leq \theta \leq \pi$,

Circulo complete $z = 2e^{1\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$

En este caso $\int_c \frac{z+2}{z} dz = 4\pi i$

Bibliografía

Campbell L. (1996) Ec. Diferenciales con valores en la Frontera, México D. F. Mc Grawhill

Churchill (1984) Variable Compleja y sus aplicaciones, México D.F. Mc Graw hill.

Colwell P. (1976) Introducción a las Variables Complejas, México D.F., Ed. Trillas.

Fulks (1978) Calculo Avanzado, México D. F. Limusa.

Haaser N. (1989) introducción al análisis matemático, México D.F, Editorial Trillas.

Rainville (1974) Ecuaciones Diferenciales, México D.F. Interamericana.

Swokowski (1982) Calculo con Geometría Analítica, Boston USA, Iberoamericana.

Piskunov (1977) Calculo, Moscú Rusia, Mir.

Wunsh D. (1977) Variable Compleja con aplicaciones, Bilbao España, Pearson.